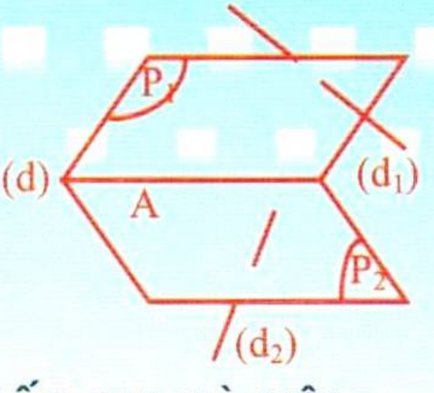
ThS. LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

12

Gồm **4** chủ đề được chia làm **25** dạng toán với **201** bài tập có lời giải chi tiết.

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}\perp(d_1)\\ \overrightarrow{IB}\perp(d_2)\\ IA=IB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{a_1}\\ \overrightarrow{IB}\perp\overrightarrow{a_2}\\ IA=IB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{a_1}=0\\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{a_2}=0\\ IA^2=IB^2\end{cases}$$



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Ths. LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)

LÊ BÍCH NGỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

12

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của BGD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.
2. Trong những câu hỏi có phần trắc nghiệm sẽ được hiểu là "**trắc nghiệm và tự luận**". Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:
    - Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm.
    - Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm còn lại.

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa $\frac{a}{2}$ điểm với xác suất 25%.
2. Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính $fx-570MS$ chắc chắn sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm.

3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN THPT

Bộ sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một ngân hàng bài tập tự luận và trắc nghiệm môn toán THPT có chất lượng theo đúng thứ tự của chương trình Toán PTTH bởi về hình thức bạn đọc sẽ nhận thấy rằng bộ sách này chính là những cuốn sách giải bài tập của bộ sách **Học và Ôn tập Toán** *(được viết theo lớp 10, 11, 12) do NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ấn hành.*

Cuốn **HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN 12**

được chia thành 4 chủ đề:

Chủ đề 1: Hệ tọa độ trong không gian

Chủ đề 2: Mặt phẳng

Chủ đề 3: Đường thẳng

Chủ đề 4: Các dạng toán liên quan tới điểm, đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Lê Hồng Đức phụ trách
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: baongoc_3339@vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

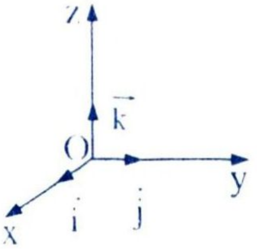
NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

CHỦ ĐỀ 1

HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



***Định nghĩa**: Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ trong không gian.*

Kí hiệu Oxyz hoặc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị lần lượt nằm trên ba trục đó.

- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Trục Ox được gọi là *trục hoành*, trục Oy được gọi là *trục tung*, trục Oz được gọi là *trục cao*.

Ta chú ý rằng: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$.

2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Ta có: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Chú ý: Ta có các kết quả:

$M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M(x; y; 0)$.

$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M(0; y; z)$.

$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M(x; 0; z)$.

$M \in Ox \Leftrightarrow y = 0$ và $z = 0$, tức là $M(x; 0; 0)$.

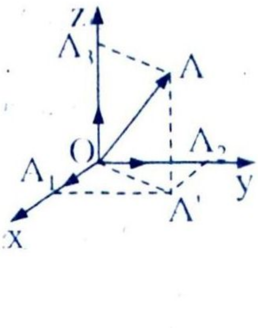
$M \in Oy \Leftrightarrow x = 0$ và $z = 0$, tức là $M(0; y; 0)$.

$M \in Oz \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$, tức là $M(0; 0; z)$.

3. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

Ta có: $\vec{v}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Chú ý:



1. Cho vectơ $\vec{v}$ khi đó tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Gọi A_1, A_2, A_3, A' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy, Oz và mặt phẳng (Oxy).

Ta có:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

suy ra x, y, z là các tọa độ tương ứng của các điểm A_1, A_2, A_3 trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

2. Nếu $\vec{v}(x; y; z)$ thì $x = \vec{v}.\vec{i}$, $y = \vec{v}.\vec{j}$, $z = \vec{v}.\vec{k}$.

Đối với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ ta có các kết quả sau:

a. $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

b. $\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1)$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. $\alpha\vec{v}_1 \pm \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 \pm \beta x_2; \alpha y_1 \pm \beta y_2; \alpha z_1 \pm \beta z_2)$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

d. $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

e. $|\vec{v}_1| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

f. $\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

g. $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

4. LIÊN HỆ GIỮA TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ HAI ĐIỂM MÚT

Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có các kết quả sau:

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

b. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$.

d. Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

5. TÍCH CÓ HƯỚNG (HAY TÍCH VECTƠ) CỦA HAI VECTƠ

***Định nghĩa**: Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{v}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ kí hiệu $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ là một vectơ $\vec{v}$ được xác định bởi:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

***Các tính chất**:* Ta có:

a. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \vec{0}$ khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ cùng phương.

b. Vectơ $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ vuông góc với hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

c. $|[\vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin\alpha$, trong đó α là góc giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

***Diện tích tam giác**:* Diện tích của ΔABC có các đỉnh được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

***Định lí**: Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng là:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2].\vec{v}_3 = 0.$$

Như vậy, với $\vec{v}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{v}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ và $\vec{v}_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ thì $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = 0.$$

***Thể tích hình hộp**:* Thể tích V của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi công thức:

$$V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|.$$

***Thể tích tứ diện**:* Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|.$$

6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

***Định lí**: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R có phương trình:*

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc của mặt cầu.*

Vậy, ta được: $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$

Chú ý: Ta có:

- Mặt cầu tâm O bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Mặt cầu đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Định lí: *Trong không gian Oxyz, mặt (S) có phương trình:*

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \qquad (2)$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ *là phương trình của mặt cầu tâm* I(a; b; c) *và bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt cầu.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Tọa độ của vectơ và của điểm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả trong phần:

- Tọa độ của vectơ.
- Tọa độ của điểm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm M(1; 2; 3), N(−1; 0; 4), P(2; −3; 1) và Q(2; 1; 2). Cặp vectơ cùng phương là:

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$.

B. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{NQ}$.

C. $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NP}$.

D. Không tồn tại.

Bài tập 2. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho điểm M(a; b; c).

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ và các trục tọa độ.

b. Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng toạ độ, đến các trục toạ độ.

c. Tìm toạ độ các điểm đối xứng với M qua các mặt phẳng toạ độ, các trục toạ độ và qua điểm O.

Bài tập 3. Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$), trong đó $k \neq 1$ có tọa độ:

A. $\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$.

B. $\left(\dfrac{x_A - kx_B}{k}; \dfrac{y_A - ky_B}{k}; \dfrac{z_A - kz_B}{k}\right)$.

C. $\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1+k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1+k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1+k}\right)$.

D. $\left(\dfrac{x_A + kx_B}{k}; \dfrac{y_A + ky_B}{k}; \dfrac{z_A + kz_B}{k}\right)$.

Bài tập 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm M(2; 0; 0), N(0; −3; 0) và P(0; 0; 4).

Nếu tứ giác MNPQ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là:

A. (−2; −3; 4). **B.** (3; 4; 2).

C. (2; 3; 4). **D.** (−2; −3; −4).

Bài tập 5. Cho hình bình hànhABCD, biết A(−3; -2; 0), B(3; -3; 1), C(5; 0; 2).

a. Đỉnh D có tọa độ là:

A. (−1; 1; 1). **B.** (1; 1; 1). **C.** (−1; 1; −1). **D.** (1; 1; −1).

b. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Bài tập 6. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, biết A(2, − 1, 3), B(0, 1, − 1), C(− 1, 2, 0), D_1(3, 2, − 1).

Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Bài toán 2: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng định nghĩa cùng các tính chất của tích vô hướng kết hợp với biểu thức tọa độ của chúng trong không gian để thực hiện các yêu cầu đặt ra.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Đối với hệ toạ độ (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) cho các véctơ:

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j};\ \vec{v} = 3\vec{i} + 5(\vec{j} - \vec{k});\ \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k} + 3\vec{j}.$$

a. Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. (1; –2; 0). **B.** (1; 2; 0). **C.** (–1; –2; 0). **D.** (–1; 2; 0).

b. Toạ độ của vectơ $\vec{v}$ là:

A. (3; 5; 5). **B.** (3; 5; –5). **C.** (3; –5; –5). **D.** (3; –5; 5).

c. Toạ độ của vectơ $\vec{w}$ là:

A. (2;3;1) **B.** (2; –3;1) **C.** (2; 3; –1). **D.** (–2, –3,1)

d. Côsin của góc ($\vec{u}$; $\vec{i}$) bằng:

A. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

e. Côsin của góc ($\vec{v}$; $\vec{j}$) bằng:

A. $\frac{5}{\sqrt{59}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{19}}$. **C.** $-\frac{5}{\sqrt{19}}$. **D.** $-\frac{5}{\sqrt{59}}$.

f. Côsin của góc ($\vec{w}$; $\vec{k}$) bằng:

A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $-\frac{1}{\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

g. Tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$ bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** –7. **D.** –5.

h. Tích vô hướng $\vec{u}.\vec{w}$ bằng:

A. –1. **B.** –2. **C.** –3. **D.** –4.

i. Tích vô hướng $\vec{v}.\vec{w}$ bằng:

A. 26. **B.** 24. **C.** 22. **D.** 20.

Bài tập 8. Đối với hệ toạ độ (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) cho véctơ tùy ý $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng $\cos^2(\vec{u}, \vec{i}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{j}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{k}) = 1$.

Bài tập 9. Tìm cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $\vec{u}(1; 1; 1)$ và $\vec{v}(2; 1; -1)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

b. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ và $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

A. $\frac{8\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{4\sqrt{13}}{5}$. C. $-\frac{4\sqrt{13}}{5}$. D. $-\frac{8\sqrt{13}}{65}$.

Bài tập 10. Biết $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, góc giữa vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Để vectơ $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$ thì k nhận giá trị bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 40.

Bài tập 11.

a. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho M cách đều hai điểm A(1; 2; 3) và B(−3; −3; 2).

A. (−1; 0; 0). **B.** (1; 0; 0). **C.** (0; −1; 0). **D.** (0; 1; 0).

b. Cho ba điểm A(2; 0; 4), B(4; $\sqrt{3}$; 5) và C(sin5t; cos3t; sin3t). Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc tọa độ).

A. $t = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $t = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $t = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $t = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $t = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $t = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $t = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $t = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 12. Cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1).

a. Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

A. (3; 1; 0). **B.** (1; 0; 3). **C.** (1; 0; −3). **D.** (−3; 1; 0).

c. Tính chu vi ΔABC.

A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}+5\sqrt{5}+3\sqrt{3}$.

d. Tính diện tích ΔABC.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e. Tính độ dài đường cao của ΔABC kẻ từ đỉnh A.

A. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{26}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{22}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

f. Tính các góc của ΔABC.

Bài toán 3: Chứng minh ba vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng, không đồng phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta sử dụng kết quả:

Định lí: *Điều kiện cần và đủ để ba vectơ* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *và* $\vec{v}_3$ *đồng phẳng là:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2].\vec{v}_3 = 0.$$

Như vậy, với $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ và $\vec{v}_3(x_3, y_3, z_3)$ thì $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = 0.$$

Cách 2: Xét phương trình: $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$

a. Nếu phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng.

b. Nếu phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ không đồng phẳng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13. Xét sự đồng phẳng của ba véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $\vec{u}(4; 3; 4)$, $\vec{v}(2; -1; 2)$, $\vec{w}(1; 2; 1)$.

b. $\vec{u}(1; -1; 1)$, $\vec{v}(0; 1; 2)$, $\vec{w}(4; 2; 3)$.

c. $\vec{u}(4; 2; 5)$, $\vec{v}(3; 1; 3)$, $\vec{w}(2; 0; 1)$.

Bài tập 14. Trong không gian Oxyz, cho các vectơ:

$\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 3; -1)$ và $\vec{c}(3; -1; 2)$,

$\vec{u}(5; -5; 1)$, $\vec{v}(9; -3; 7)$ và $\vec{w}(1; 8; 8)$.

a. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

Bài tập 15. Trong không gian Oxyz, cho các vectơ $\vec{a}(1; t; 2)$, $\vec{b}(t + 1; 2; 1)$ và $\vec{c}(0; t - 2; 2)$. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi t nhận giá trị bằng:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $-\frac{2}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Bài tập 16. Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(−2; 1; −2).

a. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b. Côsin góc tạo bởi cặp cạnh đối AB, CD của tứ diện bằng:

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

c. Côsin góc tạo bởi cặp cạnh đối AC, BD của tứ diện bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d. Côsin góc tạo bởi cặp cạnh đối AD, BC của tứ diện bằng:

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

e. Thể tích tứ diện ABCD bằng:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

f. Độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A bằng:

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 4: Mở đầu về phương pháp tọa độ hóa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ trục toạ độ thích hợp, từ đó suy ra toạ độ của các điểm cần thiết.

Bước 2: Thiết lập biểu thức giải tích, cụ thể:

Với bài toán định lượng: Là giá trị cần xác định, thông thường bao gồm:

- Độ dài đoạn thẳng.
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.
- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng.
- Góc giữa hai đường thẳng.
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- Góc giữa hai mặt phẳng.
- Thể tích khối đa diện.
- Diện tích thiết diện.

Với bài toán định tính: Là biểu thức điều kiện, từ đó suy ra kết quả cần chứng minh, bao gồm:

1. Để chứng minh một biểu thức vectơ, ta cần xác định toạ độ của các vectơ trong biểu thức đó, từ đó thay vào biểu thức để đưa ra kết luận.
2. Chứng minh mối liên hệ đại số.
3. Với $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2) thì:

   a. $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} // \overrightarrow{a_2}$.

   b. $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = 0$.
4. Với $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ là vtpt của (P_1) và (P_2) thì:

   a. $(P_1) // (P_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$.

   b. $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$.

5. Với $\vec{a}$ là vtcp của (d) và $\vec{n}$ là vtpt của (P) thì:

a. $(d) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$.

b. $(d) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a. Độ dài MN bằng:

A. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$. **C.** $\frac{1}{4}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$.

B. $\frac{1}{3}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$. **D.** $\frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$.

b. Để MN vuông góc với SB điều kiện là:

A. $4h^2 = a^2 - b^2$. **C.** $4h^2 = 2a^2 + b^2$.

B. $4h^2 = 2a^2 - b^2$. **D.** $4h^2 = a^2 + b^2$.

Bài tập 18. Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a, M là trung điểm cạnh BC. Trên các nửa đường thẳng AA_1, MM_1 vuông góc với mặt phẳng (ABC) về cùng một phía, lấy tương ứng các điểm N, I sao cho 2MI = NA = a. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống NB. Chứng minh rằng AH vuông góc với NI.

Bài tập 19. Cho tứ diện vuông OABC có các góc phẳng ở đỉnh O là vuông, ngoài ra OC = OA + OB. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh C bằng 90^0.

Bài tập 20. Cho góc tam diện vuông Oxyz. Điểm N cố định nằm trong góc tam diện, mặt phẳng (P) qua N cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ N đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) là a, b, c.

a. Chứng minh rằng $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$.

b. Tính OA, OB, OC để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất.

c. Tính OA, OB, OC để OA + OB + OC đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 5: Phương trình mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (1)$$

Bước 2: Để (1) là phương trình mặt cầu điều kiện là:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bước 3: Khi đó (S) có thuộc tính:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 21. Tìm tọa độ tâm và bán kính mỗi mặt cầu sau đây:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

A. $I(4; -1; 0)$ và $R = 4$. **C.** $I(-4; 1; 0)$ và $R = 4$.

B. $I(4; -1; 0)$ và $R = 16$. **D.** $I(-4; 1; 0)$ và $R = 16$.

b. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$.

A. $I\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$. **C.** $I\left(3; -\frac{3}{2}; \frac{15}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{278}}{2}$.

B. $I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$. **D.** $I\left(-3; \frac{3}{2}; -\frac{15}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{278}}{2}$.

c. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$.

A. $I(3; -9; 0)$ và $R = \frac{2}{3}$. **C.** $I\left(\frac{1}{3}; -1; 0\right)$ và $R = 1$.

B. $I(-3; 9; 0)$ và $R = \frac{2}{3}$. **D.** $I\left(-\frac{1}{3}; 1; 0\right)$ và $R = 1$.

Bài tập 22. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0.$$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

A. $m > 2$. **B.** $m < 1$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** Mọi m.

b. Chứng minh rằng tâm của (S_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

c. Tìm mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong họ (S_m).

A. $(S_{1/2})$. **B.** (S_1). **C.** (S_2). **D.** (S_6).

Bài tập 23. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0.$$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

A. $m \neq \sqrt{2}$. **B.** $m \neq -\sqrt{2}$. **C.** $m \neq \pm\sqrt{2}$. **D.** Mọi m.

b. Chứng minh rằng tâm của họ (S_m) luôn nằm trên một Parabol (P) cố định trong mặt phẳng Oxy, khi m thay đổi.

c. Trong mặt phẳng Oxy, gọi F là tiêu điểm của (P). Giả sử đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α và cắt (P) tại hai điểm M, N.

- Tìm toạ độ trung điểm E của đoạn MN theo α.
- Từ đó suy ra quỹ tích E khi α thay đổi.

Bài tập 24. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx - 2my - 6z + m^2 + 4m = 0.$$

a. Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.

b. Chứng minh rằng tâm của (S_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 25. Cho họ mặt cong (S_α) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2x\sin\alpha - 2y\cos\alpha - 3 = 0$$

a. Tìm điều kiện của α để (S_α) là một họ mặt cầu.

b. Chứng minh rằng tâm của họ (S_α) luôn chạy trên một đường tròn (C) cố định trong mặt phẳng Oxy khi α thay đổi.

c. Trong mặt phẳng Oxy, (C) cắt Oy tại A và B. Đường thẳng $y = m$ $(-1 < m < 1,\ m \neq 0)$ cắt (C) tại T và S, đường thẳng qua A, T cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Bài toán 6: Lập phương trình mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi (S) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

- Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, d, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
- Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, R, điều kiện $R > 0$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2825

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kĩ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình mặt cầu.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; -3)$ và bán kính $R = 3$ có phương trình:

A. (S): $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.

B. (S): $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

C. (S): $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

D. (S): $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

Bài tập 27. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(3; 1; -1)$ có phương trình:

A. (S): $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$.

B. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$.

C. (S): $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

D. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

Bài tập 28. Mặt cầu (S) đường kính AB với $A(1; 3; 2)$, $B(3; 5; 0)$ có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 2$. **C.** $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 2$.

B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 3$. **D.** $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Bài tập 29. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm 2 điểm $A(3; 1; 0)$, $B(5; 5; 0)$ và tâm $I \in Ox$.

A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. **C.** (S): $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

B. (S): $(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 50$. **D.** (S): $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 13$.

Bài tập 30. Phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) có dạng:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 10z + 48 = 0$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 2z - 8 = 0$.

Bài tập 31. Phương trình mặt cầu có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox có dạng:

A. $(x + 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. **C.** $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

B. $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. **D.** $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Bài tập 32. Phương trình mặt cầu có tâm I(1; 2; 3) và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) có dạng:

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$. **C.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

B. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. **D.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$.

Bài tập 33. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD với A(1; −4; 3), B(1; 0; 5), C(0; 3; −2), D(6; −1; −2) có dạng:

A. $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z - \dfrac{212}{49} = 0$.

B. $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - x + y - \dfrac{50}{49}z - \dfrac{25}{49} = 0$.

C. $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{212}{49}x + \dfrac{25}{49}y - \dfrac{50}{49}z - \dfrac{116}{7} = 0$.

D. $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{212}{49}x + y - z - \dfrac{50}{49} = 0$.

Bài tập 34. Cho góc tam diện vuông Oxyz. Tìm tập hợp tâm của các đường tròn bán kính R luôn tiếp xúc với các mặt của góc tam diện Oxyz.

Bài tập 35. Cho góc tam diện vuông Oxyz. Tìm điểm M trong tam diện sao cho tổng khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) bằng:

a. 1. b. $\sqrt{2}$ OM.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải):

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì:

  $\overrightarrow{MN}(-2; -2; 1)$ và $\overrightarrow{PQ}(0; 4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ không cùng phương

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với đáp án B thì:

  $\overrightarrow{MP}(1; -5; -2)$ và $\overrightarrow{NQ}(3; 1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{NQ}$ không cùng phương

  $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với đáp án C thì:

$$\overrightarrow{MQ}(1;-1;-1) \text{ và } \overrightarrow{NP}(3;-3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{MQ} \text{ và } \overrightarrow{NP} \text{ cùng phương.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái):

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án C thì:

$$\overrightarrow{MQ}(1;-1;-1) \text{ và } \overrightarrow{NP}(3;-3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{MQ} \text{ và } \overrightarrow{NP} \text{ cùng phương.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 2.

a. Hình chiếu vuông góc của M trên:

- Mặt phẳng (Oxy) là điểm $M_1(a; b; 0)$.
- Mặt phẳng (Oyz) là điểm $M_2(0; b; c)$.
- Mặt phẳng (Oxz) là điểm $M_3(a; 0; c)$.
- Trục Ox là điểm $M_4(a; 0; 0)$.
- Trục Oy là điểm $M_5(0; b; 0)$.
- Trục Oz là điểm $M_6(0; 0; c)$.

b. Khoảng cách từ điểm M đến:

- Mặt phẳng (Oxy) bằng $MM_1 = |c|$.
- Mặt phẳng (Oyz) bằng $MM_2 = |a|$.
- Mặt phẳng (Oxz) bằng $MM_3 = |b|$.
- Trục Ox bằng $MM_4 = \sqrt{b^2 + c^2}$.
- Trục Oy bằng $MM_5 = \sqrt{a^2 + c^2}$.
- Trục Oz bằng $MM_6 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c. Điểm đối xứng với M qua:

- Mặt phẳng (Oxy) là điểm M_1' nhận điểm $M_1(a; b; 0)$ làm trung điểm nên $M_1'(a; b; -c)$.
- Mặt phẳng (Oyz) là điểm M_2' nhận điểm $M_2(0; b; c)$ làm trung điểm nên $M_2'(-a; b; c)$.
- Mặt phẳng (Oxz) là điểm M_3' nhận điểm $M_3(a; 0; c)$ làm trung điểm nên $M_3'(a; -b; c)$.
- Trục Ox là điểm M_4' nhận điểm $M_4(a; 0; 0)$ làm trung điểm nên $M_4'(a; b; c)$.

- Trục Oy là điểm M_5' nhận điểm $M_5(0; b; 0)$ làm trung điểm nên $M_5'(-a; b; -c)$.
- Trục Oz là điểm M_6' nhận điểm $M_6(0; 0; c)$ làm trung điểm nên $M_6'(-a; -b; c)$.
- Gốc O là điểm M_7 nhận gốc làm trung điểm nên $M_7(-a; -b; -c)$.

Bài tập 3. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Điểm M(x; y; z) chia đoạn thẳng AB theo một tỉ số k, tức là:

$$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (x_A - x; y_A - y; z_A - z) = k(x_B - x; y_B - y; z_B - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x = k(x_B - x) \\ y_A - y = k(y_B - y) \\ z_A - z = k(z_B - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_A - kx_B}{1-k}; \frac{y_A - ky_B}{1-k}; \frac{z_A - kz_B}{1-k}\right).$$

Bài tập 4. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Giả sử Q(x; y; z). Khi đó, để MNPQ là hình bình hành điều kiện là:

$$MN \overset{/\!/}{=} QP \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (-2; -3; 0) = (-x; -y; 4 - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -x \\ -3 = -y \\ 0 = 4 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow Q(2; 3; 4), \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Giả sử Q(x; y; z). Khi đó, để MNPQ là hình bình hành điều kiện là MP là NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của MP và NQ, ta có:

$$I(1; 0; 2) \text{ và } J\left(\frac{x}{2}; \frac{y-3}{2}; \frac{z}{2}\right),$$

$$I \equiv J \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 = 1 \\ \dfrac{y-3}{2} = 0 \\ z/2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow Q(2; 3; 4), \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.1*: (Từ trái qua phải): Để MNPQ là hình bình hành điều kiện là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, với $\overrightarrow{MN}(-2; -3; 0)$.

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì $\overrightarrow{QP}(2; 3; 0)$ nên đáp án A bị loại.
- Với đáp án B thì $\overrightarrow{QP}(-3; -4; 2)$ nên đáp án B bị loại.
- Với đáp án C thì $\overrightarrow{QP}(-2; -3; 0) = \overrightarrow{MN}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.2*: (Từ phải qua trái): Để MNPQ là hình bình hành điều kiện là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, với $\overrightarrow{MN}(-2; -3; 0)$.

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án D thì $\overrightarrow{QP}(2; 3; 8)$ nên đáp án D bị loại.
- Với đáp án C thì $\overrightarrow{QP}(-2; -3; 0) = \overrightarrow{MN}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2.1*: (Từ trái qua phải): Để MNPQ là hình bình hành điều kiện là MP là NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, với trung điểm I của MP là I(1; 0; 2).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì trung điểm của NQ có tọa độ (−1; −3; 2) nên đáp án A bị loại.
- Với đáp án B thì trung điểm của NQ có tọa độ $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ nên đáp án B bị loại.
- Với đáp án C thì trung điểm của NQ có tọa độ $(1; 0; 2) \equiv I$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2.2*: (Từ phải qua trái): Để MNPQ là hình bình hành điều kiện là MP là NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, với trung điểm I của MP là I(1; 0; 2).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án D thì trung điểm của NQ có tọa độ (−1; −3; −2) nên đáp án D bị loại.
- Với đáp án C thì trung điểm của NQ có tọa độ $(1; 0; 2) \equiv I$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 5.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử D(x; y; z), để ABCD là hình bình hành điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (6; -1; 1) = (5 - x; -y; 2 - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 5 - x \\ -1 = -y \\ 1 = 2 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 1; 1).$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}(8; 2; 2)$ và $\overrightarrow{BD}(-4; 4; 0)$ được cho bởi:

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{8.(-4) + 2.4}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2}.\sqrt{(-4)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Bài tập 6. Vì ABCD là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -1 - x_D \\ 2 = 2 - y_D \\ -4 = -z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 0 \\ z_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 0; 4).$$

Vì $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$ nên: $\begin{cases} x_{C_1} + 1 = 2 \\ y_{C_1} - 2 = 2 \\ z_{C_1} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_1} = 1 \\ y_{C_1} = 4 \\ z_{C_1} = -5 \end{cases} \Rightarrow C_1(1; 4; -5).$

Tương tự ta có được $A_1(4; 1; -2)$, $B_1(2; 3; -6)$.

Bài tập 7.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

d. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\cos(\vec{u}; \vec{i}) = \dfrac{1.1 - 2.0 + 0.0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

e. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\cos(\vec{v}; \vec{j}) = \dfrac{3.0 + 5.1 - 5.0}{\sqrt{3^2 + 5^2 + (-5)^2}.\sqrt{1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{59}}$,

f. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\cos(\vec{w};\vec{k}) = \dfrac{2.0+3.0-1.1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

g. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có $\vec{u}.\vec{v} = 1.3 - 2.5 + 0.(-5) = -7$,

h. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có $\vec{u}.\vec{w} = 1.2 - 2.3 + 0.(-1) = -4$,

i. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có $\vec{v}.\vec{w} = 3.2 + 5.3 - 5(-1) = 26$.

Bài tập 8. Giả sử $\vec{u}(x; y; z)$, khi đó ta có:

$$\cos^2(\vec{u},\vec{i}) + \cos^2(\vec{u},\vec{j}) + \cos^2(\vec{u},\vec{k}) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 9.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*:

Ta có: $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{1.2+1.1+1.(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có $\vec{u}(3; 4; 0)$ và $\vec{v}(0; -2; 3)$ nên:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{3.0+4.(-2)+0.3}{\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{(-2)^2+3^2}} = -\frac{8}{5\sqrt{13}} = -\frac{8\sqrt{13}}{65}.$$

Bài tập 10. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\vec{p}.\vec{q} = (k\vec{u}+17\vec{v}).(3\vec{u}-\vec{v}) = 3k\vec{u}^2 - 17\vec{v}^2 + (51-k)\vec{u}.\vec{v}$$

$$= 3k|\vec{u}|^2 - 17|\vec{v}|^2 + (51-k)|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$= 12k - 425 - 5(51-k) = 17k - 680.$$

Để hai vectơ $\vec{p}$ và $\vec{q}$ vuông góc với nhau điều kiện là:

$$\vec{p}.\vec{q} = 0 \Leftrightarrow 17k - 680 = 0 \Leftrightarrow k = 40.$$

Bài tập 11.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Với điểm M thuộc Ox thì M(x; 0; 0), ta có:

$$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2^2 + 3^2 = (x+3)^2 + (-3)^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow M(-1; 0; 0).$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Để AB vuông góc với OC điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow (2;\ \sqrt{3};\ 1).(\sin 5t; \cos 3t; \sin 3t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0 \Leftrightarrow \sin 5t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 3t$$

$$\Leftrightarrow \sin 5t = -\left(\sin\frac{\pi}{3}.\cos 3t + \cos\frac{\pi}{3}.\sin 3t\right) = -\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-3t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t = -3t - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 5t = \pi + 3t + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4} \\ t = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 12.

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}(-1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{AC}(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử D(x; y; z), để ABCD là hình bình hành điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (-1; 0; 1) = (2 - x; 1 - y; 1 - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2 - x \\ 0 = 1 - y \\ 1 = 1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(3; 1; 0).$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $CV_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

d. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \frac{1}{2}\left|(-1;\ 2\ -1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

e. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*:

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_A.BC \Leftrightarrow h_A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2.\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

f. Ta lần lượt có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1 \Leftrightarrow A = 90^0,$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \text{và} \quad \cos C = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Bài tập 13.

a. Ta xét: $[\vec{u},\ \vec{v}].\vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.1 + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.1 = 10 + 0 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow$ Ba véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng.

b. Ta xét:

$$[\vec{u},\ \vec{v}].\vec{w} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.4 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.3 = -12 - 4 + 3 = -13$$

$\Leftrightarrow$ Ba véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ không đồng phẳng.

c. Ta xét: $[\vec{u},\ \vec{v}].\vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.0 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.1 = 2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ Ba véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng.

Bài tập 14.

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có: $[\vec{a},\ \vec{b}].\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}.3 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.(-1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.2 = -42$

$\Leftrightarrow$ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2: Xét phương trình:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha + 2\beta \\ -1 = 2\alpha + 3\beta\text{, vô nghiệm} \\ 2 = 3\alpha - \beta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b. Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.8 + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}.8$

$$= -32 - 8.26 + 8.30 = 0$$

$\Leftrightarrow$ ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

Bài tập 15. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng điều kiện là:

$$[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} t & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.0 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix}(t-2) + \begin{vmatrix} 1 & t \\ t+1 & 2 \end{vmatrix}.2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{5}.$$

Vậy, với $t = \frac{2}{5}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 16.

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD}(-3; 1; -2)$, từ đó suy ra:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.(-3) + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.1 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.(-2)$$

$= -3 + 1 - 2 = -4 \Leftrightarrow$ Ba véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Trước tiên ta tính được $\overrightarrow{CD}(-2; 1; -3)$, suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow \cos(AB, CD) = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Trước tiên ta tính được $\overrightarrow{BD}$ (–2; 0; –2), suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = 0 \Rightarrow \cos(AB, CD) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AC, BD) = 90^0 \Leftrightarrow AC \perp BD,$$

d. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Trước tiên ta tính được $\overrightarrow{BC}$ (0; –1; 1), suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = -\frac{3}{2\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow \cos(AB, CD) = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

e. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Thể tích tứ diện ABCD được cho bởi:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.|-4| = \frac{2}{3}.$$

f. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A được cho bởi:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}h_A.S_{\Delta BCD} \Leftrightarrow h_A = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{3V_{ABCD}}{\frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}]\right\|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Bài tập 17. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, Ox là tia AC, Oz là tia AS.

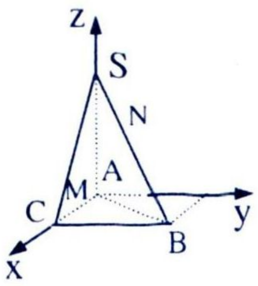
Từ đó, suy ra: A(0; 0; 0), B(b; a; 0), C(b; 0; 0) và S(0; 0; h).

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Từ giả thiết, suy ra $M\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right)$ và với điểm N(x; y; z) thì:

$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow (x; y; z - h) = \frac{1}{3}(b; a; -h)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = b \\ 3y = a \\ 3(z - h) = -h \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right).$$



Khi đó: $MN = \sqrt{\left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2h}{3}\right)^2}$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{b^2+4a^2+16h^2}\ .$$

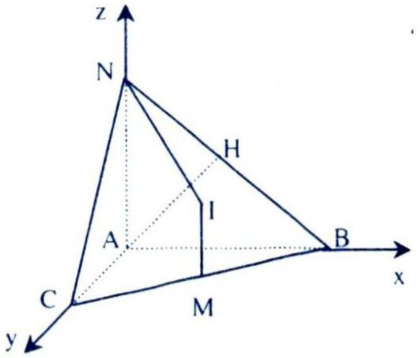
b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để MN vuông góc với SB điều kiện là:

$$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2};\ \frac{a}{3};\ \frac{2h}{3}\right).(b;\ a;\ -h) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b^2}{6}+\frac{a^2}{3}-\frac{2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2.$$



Bài tập 18. Chọn hệ trục toạ độ Axyz với $B \in Ax$, $C \in Ay$ và $D \in Az$, khi đó:

$A(0;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ a;\ 0)$,

$M(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2};\ 0)$, $N(0;\ 0;\ a)$, $I(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2};\ \frac{a}{2})$.

Vì ΔABN cân tại A nên H là trung điểm BN do đó $H(\frac{a}{2};\ 0;\ \frac{a}{2})$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}) \\ \overrightarrow{NI}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{NI} = 0$

$\Leftrightarrow AH \perp NI$.

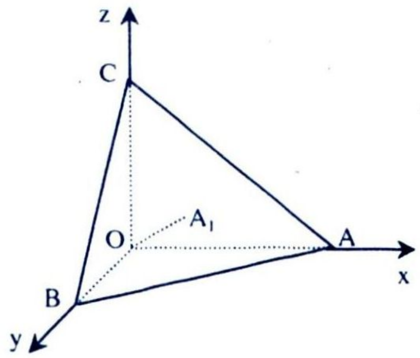
Bài tập 19. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với $A \in Ox$, $B \in Oy$ và $C \in Oz$, khi đó:

$A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$.

Gọi α_1, α_2, α_3 là ba góc phẳng ở đỉnh C, ta có:

$$\cos\alpha_1 = \frac{|\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|}$$

$$= \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2}},$$



$$\cos\alpha_2 = \frac{|\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CO}|}{|\overrightarrow{CB}|.|\overrightarrow{CO}|} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \Rightarrow \sin\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{|\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CO}|.|\overrightarrow{CA}|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \Rightarrow \sin\alpha_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Từ giả thiết $OC = OA + OB \Leftrightarrow c = a + b.$ (1)

Để tổng các góc phẳng ở đỉnh C bằng 90^0

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90^0 \Leftrightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 90^0 - \alpha_1$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha_2 + \alpha_3) = \sin(90^0 - \alpha_1) \Leftrightarrow \sin\alpha_2.\cos\alpha_3 + \cos\alpha_2.\sin\alpha_3 = \cos\alpha_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a+b)}{\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2}} \text{ luôn đúng do (1)}$$

Bài tập 20. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz, từ giả thiết ta được N(a; b; c).

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) qua N có dạng:

$$(P): \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0 \text{ với } \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

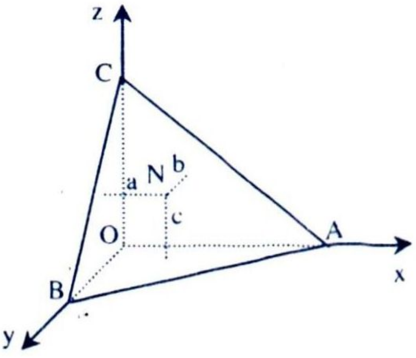
Từ đó bằng cách lấy giao điểm của (P) với Ox, Oy, Oz, ta được:

$$A\left(\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow OA = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha},$$

$$B\left(0; \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\beta}; 0\right)$$

$$\Rightarrow OB = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\beta},$$



$$C\left(0; 0; \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\gamma}\right) \Rightarrow OC = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\gamma}.$$

a. Ta có:

$$\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma} + \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} + \frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = 1.$$

b. Ta có:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}\frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma)^3}{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{1}{6}\frac{(3\sqrt[3]{a\alpha b\beta c\gamma})^3}{\alpha\beta\gamma} = \frac{9abc}{2}.$$

Vậy $\text{Min}V_{OABC} = \dfrac{9abc}{2}$, đạt được khi $a\alpha = b\beta = c\gamma$, khi đó:

$$OA = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha} = \frac{a\alpha + a\alpha + a\alpha}{\alpha} = 3a,$$

$$OB = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\beta} = \frac{b\beta + b\beta + b\beta}{\beta} = 3b,$$

$$OC = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\gamma} = \frac{c\gamma + c\gamma + c\gamma}{\gamma} = 3c.$$

c. Ta có: $OA + OB + OC = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha} + \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\beta} + \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\gamma}$

$$= a + b + c + \left(\frac{b\beta}{\alpha} + \frac{a\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{c\gamma}{\alpha} + \frac{a\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{c\gamma}{\beta} + \frac{b\beta}{\gamma}\right)$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} a + b + c + 2\sqrt{ba} + 2\sqrt{ac} + + 2\sqrt{cb}$$

$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

Vậy $\text{Min}(OA + OB + OC) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, đạt được khi

$$\frac{b\beta}{\alpha} = \frac{a\alpha}{\beta} \text{ và } \frac{c\gamma}{\alpha} = \frac{a\alpha}{\gamma} \text{ và } \frac{c\gamma}{\beta} = \frac{b\beta}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow a\alpha^2 = b\beta^2 = c\gamma^2.$$

Khi đó: $OA = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha} = a + \dfrac{b\beta}{\alpha} + \dfrac{c\gamma}{\alpha} = a + b\sqrt{\dfrac{a}{b}} + c\sqrt{\dfrac{a}{c}}$

$$= a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac},$$

tương tự $OB = \sqrt{ba} + b + \sqrt{bc}$ và $OC = \sqrt{ca} + \sqrt{cb} + c$.

Bài tập 21.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có a = 4, b = –1, c = 0 và d = 1 nên:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 16$$

từ đó, suy ra mặt cầu có tâm I(4; –1; 0) và bán kính R = 4.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0.$$

Ta có $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{5}{2}$ và $d = -\frac{2}{3}$ nên:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{49}{6}$$

từ đó, suy ra mặt cầu có tâm $I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*:

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{9} = 0.$$

Ta có $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 0$ và $d = \frac{1}{9}$ nên:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1$$

từ đó, suy ra mặt cầu có tâm $I\left(\frac{1}{3}; -1; 0\right)$ và bán kính $R = 1$.

Bài tập 22.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = (2m)^2 + (-2)^2 + (-m)^2 - m^2 - 4m = (2m-1)^2 + 3 > 0, \forall m.$$

Vậy (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với mọi m, có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(2m, -2, -m) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{(2m-1)^2 + 3} \end{cases}.$$

b. Ta có: I_m: $\begin{cases} x = 2m \\ y = -2 \\ z = -m \end{cases}$.

Vậy I_m luôn nằm trên đường thẳng (d) cố định có phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có $R^2 = (2m - 1)^2 + 3 \geq 3$.

Suy ra $R_{min} = \sqrt{3}$, đạt được khi $m = \frac{1}{2}$.

Vậy, trong họ (S_m) mặt cầu $(S_{1/2})$ có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{3}$.

Bài tập 23.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 - 8m^2 + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bán kính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

b. Ta có: I_m: $\begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}$.

Vậy, trong mặt phẳng Oxy tâm I_m luôn nằm trên Parabol (P): $y^2 = 4x$.

c. Trong mặt phẳng Oxy, xét Parabol

(P): $y^2 = 4x$, có tiêu điểm F(1, 0).

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α có dạng : (d): $\begin{cases} \text{qua } F(1;0) \\ \text{hsg } k = \tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$ (d): $y = (x - 1)\tan\alpha$.

- Toạ độ giao điểm M, N của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = (x - 1)\tan\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2\tan^2\alpha - 2(\tan^2\alpha + 2)x + \tan^2\alpha = 0. \quad (1)$$

Ta có: $\Delta' = (\tan^2\alpha + 2)^2 - \tan^4\alpha = 4\tan^2\alpha + 4 > 0, \forall\alpha$

do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt

Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_M, y_M)$, $N(x_M, y_M)$ có hoành độ thoả mãn:

$$x_M + x_N = \frac{2(\tan^2\alpha + 2)}{\tan^2\alpha}.$$

- Gọi $E(x_E, y_E)$ là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \\ y_E = (x_E - 1)\tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \frac{1}{2}\left[\frac{2(\mathrm{tg}^2\alpha + 2)}{\mathrm{tg}^2\alpha} - 2\right]\mathrm{tg}\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \frac{2}{\tan\alpha} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Khử α từ hệ (I) ta được $y_E^2 = 4x_E - 2$

Vậy, quĩ tích trung điểm E của đoạn MN thuộc Parabol (P_1): $y^2 = 4x - 2$.

Bài tập 24. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 25. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 26. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;2;-3) \\ \text{Bán kính } R = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9.$$

Bài tập 27. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; −1) có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = R^2.$$

Điểm A(3; 1; −1) ∈ (S) điều kiện là:

$$(3-1)^2 + (1-2)^2 + (-1+1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 5.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng :

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5.$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta có:

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow IM^2 = IA^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ nên các đáp án A và C bị loại.
- Thay tọa độ điểm $A(3; 1; -1)$ vào đáp án B thì:

$$(3-1)^2+(1-2)^2+(-1+1)^2=5 \Leftrightarrow 5=5 \Rightarrow A \in (S).$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 28. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R=\dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; 4; 1) \\ R=\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=3$, ứng với đáp án D.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta có:

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

$$(1-x; 3-y; 2-z).(3-x; 5-y; -z)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x).(3-x)+(3-y).(5-y)+(2-z).(-z)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-8y-2z+18=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=3.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

✍ *Lời giải tự luận 3*: Ta có:

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow MA^2+MB^2=AB^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-8y-2z+18=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=3.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Ta có: $2R=AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-3)^2+(-2)^2}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow R=\sqrt{3}$

  $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.
- Với đáp án B thì:

  $$(1+2)^2+(3+4)^2+(2+1)^2=3 \Leftrightarrow 67=3 \Rightarrow A \notin (S)$$

  $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 29. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) có tâm $I \in Ox$, có dạng:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R^2.$$

- Điểm $A(3; 1; 0) \in (S)$ nên $(3 - a)^2 + 1 = R^2$. (1)
- Điểm $B(5; 5; 0) \in (S)$ nên $(5 - a)^2 + 25 = R^2$. (2)

Lấy (1) – (2), ta được : $4a - 10 = 0 \Leftrightarrow a = 10$.

Thay $a = 10$ vào (1), ta được $R^2 = 50$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $(x - 10)^2 + y^2 + z^2 = 50$.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt cầu (S) có tâm $I \in Ox$ nên các đáp án C và D bị loại.
- Nhận thấy mặt cầu (S) trong đáp án A không đi qua điểm B nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 30. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Vì tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) nên $a = 0$. (1)

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 64 - 16b + d = 0 \\ 16 + 36 + 4 - 8a - 12b - 4c + d = 0 \\ 144 + 16 - 24b - 8c + d = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 16b - d = 64 \\ 12b + 4c - d = 56 \\ 24b + 8c - d = 160 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b = 7,\ c = 5$ và $d = 48$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 10z + 48 = 0$.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 31. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R.

Từ giả thiết suy ra $R = 2$, ngoài ra:

- (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) điều kiện là:

  $$d(I, (Oyz)) = R \Leftrightarrow a = 2.$$

- Tâm nằm trên tia Ox điều kiện là $b = c = 0$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;0;0) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 32. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R.

Từ giả thiết (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) điều kiện là:

$$R = d(I, (Oyz)) = 1.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(1;2;3) \\ \text{Bán kính } R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 33. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm A, B, C, D $\in$ (S), ta được:

$$\begin{cases} 2a - 8b + 6c - d = 26 \\ 2a + 10c - d = 26 \\ 6b - 4c - d = 13 \\ 12a - 2b - 4c - d = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 106/49 \\ b = -25/98 \\ c = 25/49 \\ d = -116/7 \end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{212}{49}x + \frac{25}{49}y - \frac{50}{49}z - \frac{116}{7} = 0.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 34. Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường tròn tâm I bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Gọi α, β, γ theo thứ tự là góc tạo bởi (P) với các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz) và (Oxz), ta được $I(R\sin\gamma, R\sin\beta, R\sin\alpha)$.

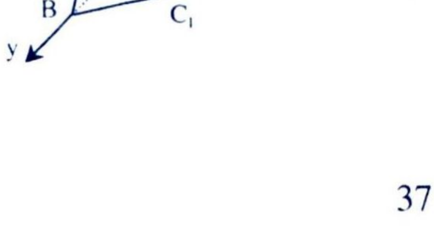
Ta dễ dàng chứng minh được rằng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \Leftrightarrow OI = R\sqrt{2}$$

Mặt khác vì d(I, (Oxy)), d(I, (Oyz)) và d(I, (Oxz)) đều không lớn hơn R.

Vậy tập hợp tâm I thuộc phần mặt cầu tâm O bán kính $R\sqrt{2}$, bị giới hạn bởi các mặt phẳng $x = R$, $y = R$ và $z = R$.

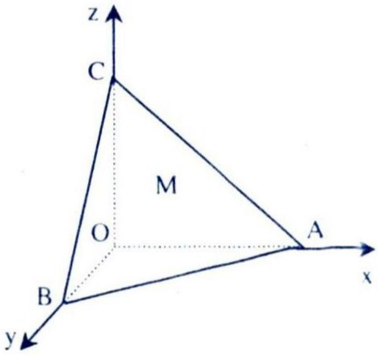


Bài tập 35. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz, khi đó điểm M(x; y; z), x, y, z ≥ 0 ở trong tam diện, ta được:

$$d(M, (Oxy)) = |z| = z,$$

$$d(M, (Oyz)) = |x| = x,$$

$$d(M, (Ozx)) = |y| = y.$$



Từ đó tổng khoảng cách d bằng

$$d = x + y + z.$$

a. Ta có ngay

$$x + y + z = 1$$

Vậy M thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi ΔABC với A(1; 0; 0), B(0; 1; 0) và C(0; 0; 1).

b. Ta có ngay

$$x + y + z = \sqrt{2}\,OM \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 2OM^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

Vậy M thuộc phần mặt cầu (S) có tâm I(1; 1; 1) bán kính $R = \sqrt{3}$ trong góc tam diện.

CHỦ ĐỀ 2

MẶT PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG

Định nghĩa 1: Hai vectơ khác vec tơ không $\vec{a}$, $\vec{b}$ gọi là *cặp vectơ chỉ phương* (vtcp) của mặt phẳng (P) nếu chúng không cộng tuyến và các đường thẳng chứa chúng đều song song với (P) (hoặc nằm trên (P)).

Chú ý:

(i). Mỗi mặt phẳng có nhiều cặp vectơ chỉ phương.

(ii). Hai mặt phẳng phân biệt có cùng một cặp vectơ chỉ phương thì song song với nhau.

(iii). Một mặt phẳng (P) được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm M và cặp vtcp $(\vec{a}\,;\,\vec{b})$ của nó.

2. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

Định nghĩa 2: Vectơ $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \perp (P) \end{cases}.$$

Nhận xét:

1. Nếu $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của mặt phẳng đó.

2. Nếu $\vec{n}$ là vtpt và $(\vec{a}\,;\,\vec{b})$ là cặp vtcp của mặt phẳng (P) thì:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}\,;\,\vec{b}].$$

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

Mặt phẳng (P) trong không gian Oxyz có phương trình tổng quát :

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0 \qquad (1)$$

nhận vectơ $\vec{n}(A, B, C)$ làm vtpt.

Một số trường hợp đặc biệt

1. Nếu D = 0, mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ.

2. Nếu A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0, mặt phẳng (P): By + Cz + D = 0 sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox.

Tương tự:

a. Mặt phẳng (P): $Ax + Cz + D = 0$

sẽ chứa hoặc song song với trục y'Oy.

b. Mặt phẳng (P): $Ax + By + D = 0$

sẽ chứa hoặc song song với trục z'Oz.

3. Nếu $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P) có dạng

$$(P): Cz + D = 0$$

sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox và y'Oy nên nó song song hoặc trùng với mặt phẳng xOy.

Tương tự:

a. Mặt phẳng (P): $Ax + D = 0$ sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng yOz,

b. Mặt phẳng (P): $By + D = 0$ sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng xOz.

Đặc biệt, các phương trình $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ theo thứ tự là phương trình của các mặt phẳng toạ độ yOz, xOz, xOy.

4. Nếu $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ thì bằng cách đặt:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}$$

ta được: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$ (2)

Phương trình (2) gọi là *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P).

5. Chia hai vế của phương trình (1) cho $M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Khi đó, đặt: $A_0 = \frac{A}{M},\ B_0 = \frac{B}{M},\ C_0 = \frac{C}{M},\ D_0 = \frac{D}{M}$

ta được: $(P): A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$ với $A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = 1$. (3)

Phương trình (3) được gọi là *phương trình pháp dạng* của mặt phẳng (P).

4. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

Cho điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Khoảng cách hình học từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Phương trình mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

là phương trình của một mặt phẳng khi và chỉ khi

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Chú ý: Đi kèm với họ mặt phẳng (P_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 3: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số mặt phẳng của họ (P_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng cố định – Dạng toán này sẽ được giải quyết trong phần chùm mặt phẳng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho phương trình:

$$(m^2 + 2m)x + (m^2 - m)y + (m^2 + 1)z - 6m^2 - 3 = 0. \quad (1)$$

a. Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ (P_m).

b. Tìm điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua.

A. M(1; 2; 3). **B.** M(2; 1; 3). **C.** M(3; 2; 1). **D.** M(1; 3; 2).

Bài tập 2. Cho phương trình: $m^3x + (m - 1)^3y + z - m(m - 1) = 0. (1)$

a. Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ (P_m).

b. Giả sử (P_m) với $m \neq 0, 1$ cắt các trục toạ độ tại A, B, C. Chứng minh rằng thể tích tứ diện OABC có giá trị không phụ thuộc m. Tính giá trị đó.

A. $V_{OABC} = \frac{1}{6}$. **B.** $V_{OABC} = \frac{1}{3}$. **C.** $V_{OABC} = \frac{1}{2}$. **D.** $V_{OABC} = \frac{5}{6}$.

Bài tập 3. Cho họ mặt phẳng $(P_{a,b,c})$ có phương trình:

$$(P_{a,b,c}): bcx + cay + abz - abc = 0, \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Chứng minh rằng khi a, b, c thay đổi mặt phẳng họ $(P_{a,b,c})$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

A. $M(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. **B.** $M(\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3})$.

C. $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$. **D.** $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Bài tập 4. Cho họ mặt phẳng $(P_{a,b,c})$ có phương trình:

$$(P_{a,b,c}): ax + by + c - 1 = 0, \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Tìm a, b, c để $(P_{a,b,c})$ cắt các trục toạ độ tại A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích lớn nhất.

A. $a = b = c = 1$. **B.** $a = b = c = 2$.

C. $a = b = c = 3$. **D.** $a = b = c = 6$.

Bài tập 5. Cho phương trình: $(m + 1)^3x - y + m^3z - m(m + 1) = 0$. (1)

a. Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ (P_m).

b. Giả sử (P_m) với $m \neq 0, 1$ cắt các trục toạ độ tại A, B, C. Chứng minh rằng thể tích tứ diện OABC có giá trị không phụ thuộc m.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để lập phương trình mặt phẳng (P) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P)$.

Xác định vtpt $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ của (P).

Bước 2: Khi đó: $(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1; n_2; n_3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (P): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

Chú ý:

1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$, luôn có dạng:

$$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Để xác định (P), ta cần đi xác định D.

2. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$, luôn có dạng:

$$(P): n_1x + n_2y + n_3z + \underline{D} = 0$$

Để xác định (P), ta cần đi xác định D.

3. Mặt phẳng (P) // (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, luôn có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + \underline{E} = 0$$

Để xác định (P), ta cần đi xác định E.

4. *Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn*, đó là mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ có phương trình

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(-1; 1; 1)$, $N(2; 4; 3)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OMN) có tọa độ là:

A. (1; 5 ; 6). **B.** (1; –5; 6). **C.** (1; 6; –5). **D.** (6; 1; 5).

Bài tập 7. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết (P) đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vtpt $\vec{n}(2; -1; 3)$.

A. (P): $x - y + z - 11 = 0$. **C.** (P): $2x - y + z - 12 = 0$.

B. (P): $2x - y + 3z - 9 = 0$. **D.** (P): $2x - y - 3z - 9 = 0$.

Bài tập 8. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết (P) đi qua điểm $B(2; -1; 1)$ và có cặp vtcp $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(3; -2; 1)$.

A. (P): $x + 4y - 3z - 2 = 0$. **C.** (P): $3x + 4y - 1 = 0$.

B. (P): $3x + 4y - 5z - 11 = 0$. **D.** (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$.

Bài tập 9. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2; 1; 4)$, $B(-2; -3; 2)$.

A. (P): $x + y + z - 1 = 0$. **C.** (P): $x + y + z = 0$.

B. (P): $2x + 2y + z - 1 = 0$. **D.** (P): $2x + 2y + 2z - 11 = 0$.

Bài tập 10. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết:

a. (P) đi qua điểm $A(1; 3; -2)$ và song song với (Q): $x + y + z + 1 = 0$.

A. (P): $x + y + z = 0$. **C.** (P): $x + y + z - 12 = 0$.

B. (P): $x + y + z - 2 = 0$. **D.** (P): $3x + 2y + z - 2 = 0$.

b. (P) đi qua điểm $B(3; -2; 3)$ và song song với các trục Ox và Oy.

A. (P): $x - 3 = 0$. **C.** (P): $z - 3 = 0$.

B. (P): $y - 3 = 0$. **D.** (P): $x + y + z - 3 = 0$.

c. (P) đi qua điểm $C(-2; 3; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (P_1), (P_2), biết:

(P_1): $2x + y + 2z - 10)$ và (P_2): $3x + 2y + z + 8 = 0$.

A. (P): $3x - 4y - z + 19 = 0$. **C.** (P): $x - 4y - 3z + 19 = 0$.

B. (P): $3x - 4y - z + 1 = 0$. **D.** (P): $3x - 4y - 5z + 11 = 0$.

Bài tập 11. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết:

a. (P) đi qua hai điểm $A(4; -1; 1)$, $B(3; 1; -1)$ và cùng phương với trục Ox.

A. (P): $x + y = 0$. **C.** (P): $x + z = 0$.

B. (P): $y + z = 0$. **D.** (P): $x + y + z = 0$.

b. (P) đi qua điểm $C(4; 3; 1)$ và chứa trục Oy.

A. (P): $x - 4z = 0$. **C.** (P): $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

B. (P): $x - 4z + 2 = 0$. **D.** (P): $x + 2y - z + 12 = 0$.

c. (P) đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$; $B(2; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $x + 2y + 3z + 3 = 0$.

A. (P): $x - y + z - 2 = 0$. **C.** (P): $2x - 2y + z - 2 = 0$.

B. (P): $x - 2y + z - 2 = 0$. **D.** (P): $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

Bài tập 12. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và $C(0; 1; 1)$ có dạng:

A. (P): $x + y - 1 = 0$. **C.** (P): $y + z - 1 = 0$.

B. (P): $x + z - 1 = 0$. **D.** (P): $x + y + z - 1 = 0$.

Bài tập 13. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 6)$.

A. (ABC): $x + y + z - 6 = 0$. **C.** (ABC): $6x + 3y + z - 6 = 0$.

B. (ABC): $3x + 3y + 3z - 1 = 0$. **D.** (ABC): $6x + y + z - 6 = 0$.

Bài tập 14. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(1; 1; 1) cắt chiều dương của các trục toạ độ tại ba điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

A. (P): $x + y + z - 1 = 0$.	**C.** (P): $x + y + z - 3 = 0$.
B. (P): $x + y + z - 2 = 0$.	**D.** (P): $x + y + z - 4 = 0$.

Bài toán 3: Vị trí tương đối của điểm và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Với hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ta có nhận xét sau:

- Nếu $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$, thì M_1 và M_2 cùng phía với (P).
- Nếu $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$, thì M_1 và M_2 khác phía với (P).

Nhận xét trên cho phép ta giải được một lớp bài toán quan trọng.

Dạng cơ bản 1: Cho mặt phẳng điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0$$

Với $M \notin (P)$, hãy lập phương trình mặt phẳng cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng h và thoả mãn:

a. Thuộc phần nửa không gian giới hạn bởi (P) không chứa M_0.

b. Thuộc phần nửa không gian giới hạn bởi (P) chứa M_0.

PHƯƠNG PHÁP THỰC HIỆN

a. Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x; y; z) \in (P_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \;\&\; M_0 \text{ khác phía với } (P) \\ d(M,(P)) = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Ax + By + Cz + D)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) < 0 \\ \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Từ hệ (I) ta có được phương trình mặt phẳng (P_1).

b. Gọi (P_2) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x; y; z) \in (P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ và } M_0 \text{ cùng phía với } (P) \\ d(M,(P)) = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Ax + By + Cz + D)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) > 0 \\ \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h \end{cases} \quad (II)$$

Từ hệ (II) ta có được phương trình mặt phẳng (P_2).

Dạng cơ bản 2: Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, (P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

với $A_1: B_1: C_1 \neq A_2: B_2: C_2$ và điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ không thuộc (P_1) và (P_2). Lập phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1), (P_2) chứa điểm M_0 hoặc của góc đối đỉnh với nó.

PHƯƠNG PHÁP THỰC HIỆN

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, $M(x; y; z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ và } M_0 \text{ cùng phía với } (P_1) \\ M \text{ và } M_0 \text{ cùng phía với } (P_2) \\ d(M,(P_1)) = d(M,(P_2)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) > 0 \\ (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) > 0 \\ \dfrac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \dfrac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có được phương trình mặt phẳng (P).

Dạng cơ bản 3: Lập phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

PHƯƠNG PHÁP THỰC HIỆN

Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D). Khi đó, điểm $M(x; y; z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M và A cùng phía với (BCD)} \\ \text{M và D cùng phía với (ABC)} \\ d(M,(ABC)) = d(M,(BCD)) \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Từ hệ (I) ta có được phương trình mặt phẳng (P).

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15. Cho điểm $M_0(1; 2; 0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 3x + 4y + z + 1 = 0.$$

Lập phương trình mặt phẳng cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 4 và thoả mãn:

a. Thuộc phần nửa mặt phẳng giới hạn bởi (P) không chứa M_0.

A. $3x + 4y + z + 1 + 4\sqrt{26} = 0.$ **C.** $x + 2y + 3z + 4\sqrt{26} = 0.$

B. $3x + 4y + z + 1 - 4\sqrt{26} = 0.$ **D.** $x + 2y + 3z - 4\sqrt{26} = 0.$

b. Thuộc phần nửa mặt phẳng giới hạn bởi (P) chứa M_0.

A. $3x + 4y + z + 1 + 4\sqrt{26} = 0.$ **C.** $x + 2y + 3z + 4\sqrt{26} = 0.$

B. $3x + 4y + z + 1 - 4\sqrt{26} = 0.$ **D.** $x + 2y + 3z - 4\sqrt{26} = 0.$

Bài tập 16. Cho điểm $M_0(0; 1; 0)$ và hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

$$(P_1): 2x + 3y + z + 1 = 0; \ (P_2): 3x + 2y - z - 3 = 0.$$

Lập phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (P_1), (P_2) chứa điểm M_0 hoặc của góc đối đỉnh với nó.

A. $x + y + z - 2 = 0.$ **C.** $5x + 5y - 2 = 0.$

B. $5x + 5y + 5z - 2 = 0.$ **D.** $x + z - 2 = 0.$

Bài tập 17. Cho tứ diện ABCD, biết A(3; 1; 0), B(1; 0; –1), C(3; –2; 0), D(0; 2; –2). Lập phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

A. $x - y - z - 5 = 0.$ **C.** $4x - 4y - 4z - 5 = 0.$

B. $x - y - 4z - 5 = 0.$ **D.** $4x - y - 4z - 5 = 0.$

Bài tập 18. Cho tứ diện ABCD có bốn đỉnh A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4) và D(4; 0; 6).

a. Lập phương trình tổng quát mặt phẳng (ABC).

b. Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện, từ đó suy ra thể tích của tứ diện.

c. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

Bài tập 19. Cho tứ diện có bốn đỉnh $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 0; 2)$, $C(0; 1; -3)$ và $D(4; -1; 0)$.

a. Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện đó.

b. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D).

Bài toán 4: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, điều kiện $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, điều kiện $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$,

để xét vị trí tương đối của (P_1) và (P_2) ta sử dụng các kết quả sau:

a. $(P_1) \equiv (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

b. $(P_1) // (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

c. $(P_1) \cap (P_2) = \{(d)\} \Leftrightarrow A_1: B_1: C_1 \neq A_2: B_2: C_2$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 20. Cho mặt phẳng (P) và họ $(Q_{\alpha,\beta})$ có phương trình:

(P): $x + y + z - 3 = 0$,

$(Q_{\alpha,\beta})$: $\alpha(x + y - 2z - 5) + \beta(x - 2y + z + 4) = 0$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi α, β luôn có (P) và $(Q_{\alpha,\beta})$ vuông góc với nhau.

b. Xác định mặt phẳng thuộc họ $(Q_{\alpha,\beta})$ sao cho khoảng cách từ nó tới điểm $M(1; 1; 1)$ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài tập 21. Cho mặt phẳng (P) và họ (Q_m) có phương trình:

(P): $x + 2y + 3z - 6 = 0$,

(Q_m): $(m + 1)x + (m + 2)y + (2m + 3)z - 4m - 6 = 0$.

1. Chứng tỏ rằng với mọi m (P) và (Q_m) không thể song song với nhau, từ đó xác định đường thẳng (d) cố định luôn thuộc (P) và (Q_m).

2. Xác định m để:

a. $(P) \equiv (Q_m)$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 9$. **D.** $m = 11$.

b. $(P) \perp (Q_m)$.

A. $m = -\frac{14}{9}$. **B.** $m = -\frac{11}{9}$. **C.** $m = -\frac{14}{3}$. **D.** $m = -\frac{11}{3}$.

c. cosin góc giữa (P) và (Q_m) bằng $\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

A. $m = -1$ hoặc $m = 2$. **C.** $m = 1$ hoặc $m = -2$.

B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{7}{2}$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = -\frac{7}{2}$.

Bài tập 22. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) có phương trình:

$$(P): x + 3y - z + 2 = 0,\ (Q): 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$(R): \alpha x - (\alpha + \beta)y + \beta z - 1 = 0.$$

Xác định giá trị của α và β để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng.

A. $\alpha = \beta = 1$. **C.** $\alpha = 15$ và $\beta = 11$.

B. $\alpha = 5$ và $\beta = 1$. **D.** $\alpha = 1$ và $\beta = 5$.

Bài tập 23. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) có phương trình:

$$(P): x + y + z - 6 = 0,\ (Q): \alpha x - 2y + \beta z + \alpha - \beta = 0,$$

$$(R): \alpha x + (\alpha - \beta)y - \beta z + 2\alpha = 0.$$

Xác định giá trị của α và β để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, từ đó xác định điểm chung I của ba mặt phẳng đó.

A. I(1; 2; 3). **B.** I(2; 1; 3). **C.** I(3; 2; 1). **D.** I(1; 3; 2).

Bài toán 5: Chùm mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, điều kiện $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, điều kiện $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$,

thoả mãn $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

Khi đó $(P_1) \cap (P_2) = \{(d)\}$ và phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Tập hợp tất cả các mặt phẳng cùng đi qua đường thẳng (d) gọi là một chùm mặt phẳng, đường thẳng (d) gọi là trục của chùm, các mặt phẳng (P_1) và (P_2) gọi là hai mặt phẳng cơ sở của chùm. Phương trình của chùm có dạng:

$$(P): \alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \ (1)$$

$$\Leftrightarrow (P): (\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + \alpha D_1 + \beta D_2 = 0. \ (1')$$

khi đó (P) có vtpt $\vec{n}(\alpha A_1 + \beta A_2; \alpha B_1 + \beta B_2; \alpha C_1 + \beta C_2)$.

Ta có thể sử dụng chùm mặt phẳng để thực hiện các dạng toán sau:

Dạng 1: Chứng minh họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định, khi đó:

Bước 1: Biến đổi phương trình của họ (P_m) về dạng:

$$f(x, y, z) + mg(x, y, z) = 0.$$

Bước 2: Vậy; họ (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d): \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Chứng minh mặt phẳng (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) cho trước, khi đó nếu giả sử:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(P_m): A(m)x + B(m)y + C(m)z + D(m) = 0.$$

chúng ta xét hai hệ phương trình

$$\begin{cases} A(m) = A \\ B(m) = B \\ C(m) = C \\ D(m) = D \end{cases} \text{ và } \begin{cases} A(m) = -A \\ B(m) = -B \\ C(m) = -C \\ D(m) = -D \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm m.}$$

Vậy, (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) ứng với $m = m_0$.

Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để mặt phẳng (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) cho trước, khi đó:

Bước 1: Xác định phương trình của trục (d) của chùm mặt phẳng (P_m).

Lấy hai điểm phân biệt $A, B \in (d)$.

Bước 2: Để (P) thuộc $(P_m) \Leftrightarrow A, B \in (P) \Rightarrow$ giá trị của tham số.

Dạng 4: Mặt phẳng của chùm đi qua một điểm M cho trước, khi đó:

Bước 1: Thay toạ độ của M vào (1) hoặc (1') ta nhận được mối liên hệ giữa α và β, ký hiệu là $k_1\alpha = k_2\beta$. (2)

Bước 2: Thay (2) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 5: Mặt phẳng của chùm song song với một mặt phẳng (Q) cho trước, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtpt $\overrightarrow{n_Q}(A; B; C)$ của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm song song với mặt phẳng (Q)

$$\Leftrightarrow \vec{n} // \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \frac{\alpha A_1 + \beta A_2}{A} = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{B} = \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{C}$$

$$\Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (3)$$

Bước 3: Thay (3) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 6: Mặt phẳng của chùm vuông góc với một mặt phẳng (Q) cho trước, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtpt $\overrightarrow{n_Q}(A; B; C)$ của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm vuông góc với mặt phẳng (Q)

$$\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0$$

$$\Leftrightarrow A(\alpha A_1 + \beta A_2) + B(\alpha B_1 + \beta B_2) + C(\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (4)$$

Bước 3: Thay (4) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 7: Mặt phẳng của chùm song song với một đường thẳng (Δ) cho trước, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm song song với một đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha A_1 + \beta A_2)a_1 + (\alpha B_1 + \beta B_2)a_2 + (\alpha C_1 + \beta C_2)a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (5)$$

Bước 3: Thay (5) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 8: Mặt phẳng của chùm vuông góc với một đường thẳng (Δ) cho trước, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm vuông góc với đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow \vec{n} // \vec{a} \Leftrightarrow \frac{\alpha A_1 + \beta A_2}{a_1} = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{a_2} = \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{a_3}$$

$$\Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (6)$$

Bước 3: Thay (6) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 9: Mặt phẳng của chùm tạo với một mặt phẳng (Q) một góc α bất kỳ, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtpt $\overrightarrow{n_Q}(A;\ B;\ C)$ của (Q).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm tạo với mặt phẳng (P) một góc α

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_Q}|} \Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (7)$$

Bước 3: Thay (7) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 10: Mặt phẳng của chùm tạo với một đường thẳng (Δ) một góc α bất kỳ, khi đó:

Bước 1: Xác định một vtcp $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ của (Δ).

Bước 2: Mặt phẳng của chùm tạo với đường thẳng (Δ) một góc α

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}.\vec{a}|}{|\vec{n}|.|\vec{a}|} \Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (8)$$

Bước 3: Thay (8) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Dạng 11: Khoảng cách từ điểm $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ cho trước đến mặt phẳng của chùm bằng l, khi đó:

Bước 1: Ta có:

$$\frac{(\alpha A_1 + \beta A_2)x_0 + (\alpha B_1 + \beta B_2)y_0 + (\alpha C_1 + \beta C_2)z_0 + \alpha D_1 + \beta D_2}{\sqrt{(\alpha A_1 + \beta A_2)^2 + (\alpha B_1 + \beta B_2)^2 + (\alpha C_1 + \beta C_2)^2}} = l$$

$$\Leftrightarrow k_1\alpha = k_2\beta. \qquad (9)$$

Bước 2: Thay (9) vào (1) ta nhận được phương trình mặt phẳng cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 24. Cho họ mặt phẳng (P_m) có phương trình:

$$(P_m) : 2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0,\ \text{m là tham số.}$$

a. Chứng minh rằng với mọi m, mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

b. Tìm mặt phẳng (P_m) vuông góc với mặt phẳng (P_0).

A. $P_{(-3/2)}$. **B.** $P_{(-1/2)}$. **C.** $P_{(3/2)}$. **D.** $P_{(1/2)}$.

c. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{39}}{2}$.

Bài tập 25. Cho chùm mặt phẳng (P_m) có phương trình:

$$(P_m): (m + 2)x + (m + 1)y + (m - 1)z - 3m - 1 = 0.$$

a. Chứng minh rằng mặt phẳng $(P) : y + 3z - 5 = 0$ thuộc chùm (P_m).

b. Xác định α, β để mặt phẳng

$$(Q) : \alpha x + \beta y - (\alpha + 1)z + 2 = 0 \text{ thuộc chùm } (P_m).$$

A. $\alpha = 1$ và $\beta = 0$. **C.** $\alpha = 12$ và $\beta = 0$.

B. $\alpha = 1$ và $\beta = 12$. **D.** $\alpha = \beta = 1$.

Bài tập 26. Xác định giá trị của các tham số n, m để mặt phẳng (P):

$$(P): 5x + ny + 4z + m = 0$$

thuộc chùm mặt phẳng $(Q_{\alpha,\beta})$: $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$.

A. $m = 1$ và $n = -5$. **C.** $m = -11$ và $n = -5$.

B. $m = -11$ và $n = 5$. **D.** $m = 11$ và $n = 5$.

Bài tập 27. Cho điểm A(1; 2; 1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z + 3.$$

a. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng (d).

A. $(P): 15x - 11y - 7z + 3 = 0$. **C.** $(P): 5x - y - z + 8 = 0$.

B. $(P): 15x - 11y - z + 8 = 0$. **D.** $(P): 5x - 15y - z + 22 = 0$.

b. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng (d).

A. $\frac{\sqrt{347}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{347}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{347}}{26}$. **D.** $\sqrt{\frac{347}{26}}$.

Bài tập 28. Cho điểm M(1; 0; 5) và hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình:

$$(P): 2x - y + 3z + 1 = 0, \quad (Q): x + y - z + 5 = 0.$$

a. Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. $\frac{8}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{14}}$. **C.** $\frac{18}{\sqrt{14}}$. **D.** $\frac{12}{\sqrt{11}}$.

b. Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến (d) của (P) và (Q) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (T): $3x - y + 1 = 0$.

Bài tập 29. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và song song với mặt phẳng (Q) biết:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases}, \ (Q): x - 3y - z + 2 = 0.$$

A. (P): $x - 3y - 3z + 11 = 0$. **C.** (P): $3x - 3y - 2z + 9 = 0$.

B. (P): $x - 3y - z = 0$. **D.** (P): $4x - 3y - 2z + 1 = 0$.

Bài tập 30. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}, \ (d_2): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

a. Với a cho trước, xác định phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2).

b. Với a cho trước, xác định phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và vuông góc với (d_2).

Bài tập 31. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (Q): x + 2y - 2z + 2 = 0.$$

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc α với $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Bài tập 32. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tạo với đường thẳng (Δ) một góc bằng 60^0 biết :

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (\Delta): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{-1}$$

Bài tập 33. Cho điểm M(4; 1; −3) và 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình:

$$(P): 2x - y + z - 4 = 0, (Q): x + y - 3z - 1 = 0.$$

a. Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. $\frac{2}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

b. Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến (d) của (P) và (Q) đồng thời khoảng cách từ nó tới điểm M bằng $\sqrt{13}$.

Bài toán 6: Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

Xác định d = d(I, (P)

Bước 2: So sánh d với R để đưa ra kết luận:

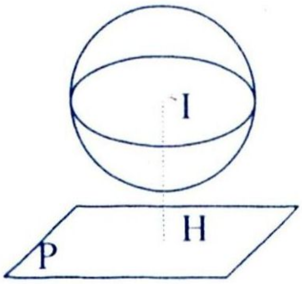
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = (C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 3).

Nếu: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$,

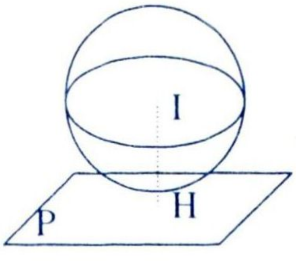
$(P): Ax + By + Cz + D = 0$,

thì phương trình đường tròn (C) có phương trình:

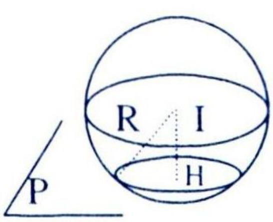
$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Chú ý: Trong trường hợp mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) ta có:

1. Với đường tròn (C):
   - (C) có tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (P).
   - Bán kính r = $\sqrt{R^2 - IH^2}$.
2. Khái niệm chùm mặt cầu dạng 1:

   " *Phương trình mặt cầu chứa (C) có phương trình:*

   $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d + m(Ax + By + Cz + D) = 0.$ "

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 34. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - m^2 = 0,$$

$$(P): 3x + 6y - 2z - 22 = 0.$$

a. Biện luận theo m vị trí tương đối của (S) và (P).

b. Xác định m để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích bằng 2π.

A. $m = 0$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = \pm 3$.

Bài tập 35. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, (P): x + y + z - 1 = 0$$

Lập phương trình mặt cầu (S_1) qua giao điểm của mặt cầu (S) và:

a. (S_1) đi qua điểm A(2; 1; −1).

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 3 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 5y - 5z + 4 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$.

b. (S_1) có tâm thuộc mặt phẳng (Q): $x + y + 2z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 4 = 0$.

c. (S_1) tiếp xúc mặt phẳng (Q): $x + 1 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0$.

Bài tập 36. Phương trình mặt cầu (S) có tâm là gốc toạ độ, tiếp xúc với mặt phẳng (P): $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ có dạng:

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; **C.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Bài tập 37. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 3), tiếp xúc với mặt phẳng (P): $3x - 4y - 10 = 0$ có dạng:

A. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

B. (S): $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 11$.

C. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 16$.

D. (S): $(x - 11)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

Bài tập 38. Phương trình mặt cầu có bán kính R = 3 và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x + 2y + z + 3 = 0$ tại điểm M(−3; 1; 1) có dạng:

A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 9$ và $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

B. $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$ và $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 9$

C. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$ và $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$ và $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$.

Bài tập 39. Cho hình chóp SABCD, biết toạ độ S(0; 0; 2), A(4; 2; 0), B(−4; 2; 0), C(−1; −2; 0) và D(1; −2; 0).

a. Lập phương trình các mặt bên của hình chóp.

b. Chứng minh rằng điểm O cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp.

c. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp.

A. (S): $x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2} + 2)^2 = 12$.

B. (S): $x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2} + 2)^2 = 8\sqrt{2}$.

C. (S): $x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2})^2 = 12 - 8\sqrt{2}$.

D. (S): $x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2} + 2)^2 = 12 - 8\sqrt{2}$.

Bài tập 40. Cho ba điểm A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c), với:

$$a, b, c > 0 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2. \qquad (*)$$

a. Chứng minh rằng khi a, b, c thay đổi mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

b. Xác định tâm I và tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < r \le \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Bài tập 41. Cho mặt phẳng (P): $2x + 2y + z = 0$. Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ và cắt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 1.

Bài tập 42. Cho ba điểm $A(1; 0; 0)$; $B(0; 2; 0)$; $C(0; 0; 3)$.

a. Viết phương trình tổng quát các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA), (ABC).

b. Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

A. $I(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. **B.** $I(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. **C.** $I(\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3})$. **D.** $I(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$.

Bài toán 7: Tiếp diện của mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cx + d = 0,\text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d \ge 0$$

hoặc $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

có tâm $I(a, b, c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Định nghĩa: Mặt phẳng (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) $\Leftrightarrow$ $d(I, (P)) = R$.

Khi đó, để " *Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu thoả mãn điều kiện cho trước* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa trên điều kiện K ta giả sử được mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bước 2: (P) là tiếp diện của (C) $\Leftrightarrow$ $d(I, (P)) = R$.

Bước 3: Kết luận về tiếp diện (P).

Chú ý: Điều kiện K thường gặp:

1. Tiếp diện đi qua điểm M cho trước, khi đó:

a. Nếu $M(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(S)} = 0$), ta có ngay:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IM}(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = R^2$$

b. Nếu $M(x_0, y_0, z_0) \notin (S)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(S)} \neq 0$), ta giả sử:

$$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. Tiếp diện song song với mặt phẳng (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, khi đó:

$$(P): Ax + By + Cz + \underline{D_1} = 0.$$

Tương tự tiếp diện vuông góc với đường thẳng (d) cho trước.

3. Tiếp diện chứa đường thẳng (d) cho trước, ta sử dụng khái niệm chùm mặt phẳng.

Cách 2: Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi toạ độ để giải.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

Phương trình tiếp diện có dạng:

$$x.x_0 + y.y_0 + z.z_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) + d = 0. \quad (1)$$

hoặc $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2$.

Điểm $M \in (S)$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d = 0 \qquad (2)$$

(hoặc $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2$)

Bước 2: Sử dụng điều kiện K của giả thiết, ta thiết lập thêm phương trình theo x_0, y_0, z_0 (I)

Bước 3: Giải hệ tạo bởi (2), (I) ta được toạ độ tiếp điểm $M(x_0, y_0, z_0)$, từ đó thay vào (1) ta được phương trình tiếp diện cần xác định.

Chú ý: Trong những trường hợp riêng cách 2 tỏ ra hiệu quả hơn.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 43. Cho 4 điểm A(1; 0; 2), B(1; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1).

a. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tại đỉnh A.

A. (P): $x + y + z - 1 = 0$.

C. (P): $3x + y + 3z - 7 = 0$.

B. (P): $x + y + 3z - 7 = 0$.

D. (P): $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Bài tập 44. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0,\ (P): 4x + 3y - 12z + 1 = 0.$$

Phương trình các mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (P) có dạng:

A. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 2 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 7 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z - 6 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 8 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z = 0$ và $4x + 3y - 12z = 0$.

Bài tập 45. Cho mặt cầu (S) và hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0,$$

$$(d_1): \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2},\ (d_2): \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}.$$

Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2)

Bài tập 46. Cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

Lập phương trình tiếp diện của (S), thoả mãn:

a. Đi qua điểm M(1; 1; 1).

b. Vuông góc với vectơ $\vec{a}(2; 1; -2)$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Vì hệ số của z bằng $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m, do đó phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2m)x_0 + (m^2 - m)y_0 + (m^2 + 1)z_0 - 6m^2 - 3 = 0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_0 + y_0 + y_0 - 6) + m(2x_0 - y_0) + z_0 - 3 = 0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 - 6 = 0 \\ 2x_0 - y_0 = 0 \\ z_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 3 \end{cases}.$$

Vậy, họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(1; 2; 3).

Bài tập 2.

a. Vì hệ số của z bằng 1 với mọi m, do đó phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{m-1}{m^2};0;0\right),\ B\left(0;\frac{m}{(m-1)^2};0\right),\ C(0;0;m(m-1)),$$

Bài tập 3. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Viết lại phương trình của $(P_{a,b,c})$ dưới dạng:

$$(P_{a,b,c}):\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (P_{a,b,c}):\ \frac{3x}{a}+\frac{3y}{b}+\frac{3z}{c}=3$$

và theo giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, suy ra điểm $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\in(P_{a,b,c})$.

Vậy, mặt phẳng $(P_{a,b,c})$ luôn đi qua điểm cố định $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Bài tập 4. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{1}{a};0;0\right),\ B\left(0;\frac{1}{b};0\right),\ C\left(0;0;\frac{1}{c}\right).$$

Khi đó thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}\overset{\text{Côsi}}{\le}\frac{1}{6}.\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\right)^3=\frac{1}{6}.$$

Vậy, ta được $(V_{OABC})_{Max}=\frac{1}{6}$, đạt được khi: $a=b=c=1$.

Bài tập 5.

a. Vì hệ số của y bằng -1 với mọi m, do đó phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{m}{(m+1)^2};0;0\right),\ B(0;-m(m+1);0),\ C\left(0;0;\frac{m+1}{m^2}\right).$$

Khi đó, thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\left|\frac{m}{(m+1)^2}\right|.|-m(m+1)|.\left|\frac{m+1}{m^2}\right| = \frac{1}{6}$$

Bài tập 6. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (OMN), ta có:

$\overrightarrow{OM}(-1\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{ON}(2;\,4;\,3)$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\2 & 4\end{vmatrix}\right) = (-1;\,5;\,-6)$$

chọn $\vec{n}(1;\,-5;\,6)$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì:

  $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 + 5 + 6 = 10 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{OM}$

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với đáp án B thì:

  $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 - 5 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

  $\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 - 20 + 18 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{ON}$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án D thì:

  $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -6 + 1 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

  $\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 12 + 4 + 18 = 34 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{ON}$

  $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với đáp án C thì:

  $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 + 6 - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

  $\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 + 24 - 15 = 11 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{ON}$

  $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

- Với đáp án B thì:

  $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 - 5 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

  $\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 - 20 + 18 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{ON}$

  Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (OMN), ta có:

$\overrightarrow{OM}(-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{ON}(2; 4; 3)$

$\vec{n} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = (-1; 5; -6)$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

  $\boxed{\text{MODE}}\,\boxed{\text{MODE}}\,\boxed{\text{MODE}}\,\boxed{3}$

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{OM}$ và vectơ $\overrightarrow{ON}$ ta ấn:

  $\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{VCT}}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{=}\,\boxed{(-)}\,1\,\boxed{=}\,1\,\boxed{=}\,1\,\boxed{=}$

  $\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{VCT}}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}\,2\,\boxed{=}\,4\,\boxed{=}\,3\,\boxed{=}$

- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:

  $\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{VCT}}\,\boxed{3}\,1\,\boxed{\times}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{VCT}}\,\boxed{3}\,2\,\boxed{=}\,\boxed{\quad -1}$

  $\boxed{\blacktriangleright}\,\boxed{\quad 5}$

  $\boxed{\blacktriangleright}\,\boxed{\quad 6}$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 7. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1, 2, 3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2, -1, 3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2.(x - 1) - 1.(y - 2) + 3.(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow (P): 2x - y + 3z - 9 = 0$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; -1; 3)$ nên các đáp án C và D bị loại.
- Thay tọa độ của A(1; 2; 3) vào đáp án A, ta thấy:

  $2.1 - 2 + 3.3 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0 \Rightarrow A \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 8. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3; 4; -1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(3;4;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3.(x-2)+4.(y+1)-1.(z-1)=0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$, ứng với đáp án D.

✍ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (3; 4; -1)$$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

  $\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}$

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{OM}$ và vectơ $\overrightarrow{ON}$ ta ấn:

  $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{VCT}}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{=}2\boxed{=}\boxed{(-)}1\boxed{=}2\boxed{=}$

  $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{VCT}}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{=}2\boxed{=}\boxed{(-)}2\boxed{=}1\boxed{=}$

- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:

  $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{VCT}}\boxed{3}1\boxed{\times}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{VCT}}\boxed{3}2\boxed{=}\boxed{\quad\quad\quad 3}$

  $\boxed{\blacktriangleright}\boxed{\quad\quad\quad 4}$

  $\boxed{\blacktriangleright}\boxed{\quad\quad\quad -1}$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(3;4;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3.(x-2)+4.(y+1)-1.(z-1)=0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$, ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án A có vtpt $\vec{n}(1; 4; -3)$ ta nhận thấy $\vec{n}$ không vuông góc với $\vec{b}$, nên đáp án A bị loại.
- Với (P) cho bởi đáp án B có vtpt $\vec{n}(3; 4; -5)$ ta nhận thấy $\vec{n}$ không vuông góc với $\vec{b}$, nên đáp án B bị loại.
- Với (P) cho bởi đáp án C có vtpt $\vec{n}(3, 4, 0)$ ta nhận thấy $\vec{n}$ không vuông góc với $\vec{a}$ nên đáp án C bị loại.

- Với (P) cho bởi đáp án D có vtpt $\vec{n}(3;4;-1)$ ta nhận thấy:

  $$\vec{n}.\vec{a} = 6-4-2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$$
  $$\vec{n}.\vec{b} = 9-8-1 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{b}$$
  $$3.2+4(-1)-1-1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án D có vtpt $\vec{n}(3;4;-1)$ ta nhận thấy:

  $$\vec{n}.\vec{a} = 6-4-2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$$
  $$\vec{n}.\vec{b} = 9-8-1 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{b}$$
  $$3.2+4(-1)-1-1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 9. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua I là trung điểm AB} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(0;-1;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BA}(4;4;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 2x+2(y+1)+z-3=0$$

$$\Leftrightarrow (P): 2x+2y+z-1=0, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với hai điểm A và B ta có $\overrightarrow{BA}(4;4;2)$

  Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB phải có vtpt cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BA}$, nên các đáp án C và D bị loại.
- Gọi I là trung điểm AB, ta có $I(0;-1;3)$, khi đó:
  - Với đáp án A, ta thấy:

    $$2.0+2.(-1)+3-3=0 \Leftrightarrow -2=0 \Rightarrow I \notin (P) \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 10.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

- Vì (P) // (Q): $x+y+z+1=0$, có dạng:

  $$(P): x+y+z+E=0.$$
- Vì $A(1;3;-2) \in (P)$, ta có $1+3+(-2)+E=0 \Leftrightarrow E=-2$.

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $x+y+z-2=0$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

- Vì (P) song song với các trục Ox và Oy ⇔ (P) // (Oxy), có dạng:

  $(P): z + E = 0.$

- Vì $B(3; -2; 3) \in (P)$, ta có : $3 + E = 0 \Leftrightarrow E = -3$.

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $z - 3 = 0$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (P_1), (P_2), ta có: $\overrightarrow{n_1}(2; 1; 2)$, $\overrightarrow{n_2}(3; 2; 1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (P_1), (P_2) nên nó nhận $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ làm cặp vtcp, từ đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3; 4; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } C(-2;3;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-3;4;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P):\ -3.(x+2) + 4.(y-3) + 1.(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): 3x - 4y - z + 19 = 0.$$

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $3x - 4y - z + 19 = 0$.

Bài tập 11.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(-1;2;-2) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{e_1}(1;0;0) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}] = (0; -2; -2) \text{ chọn } \vec{n}(0; 1; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi: $(P): \begin{cases} \text{qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): y + z = 0.$

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $y + z = 0$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OC}(4;3;1) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{e_2}(0;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{e_2}] = (-1; 0; 4) \text{ chọn } \vec{n}(1; 0; -4).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } C(4;3;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;0;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 4z = 0.$$

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $x - 4z = 0$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q), ta được $\overrightarrow{n_Q}(1; 2; 3)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(1;1;1) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q}(1;2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_Q}] = (1; -2; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;0;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): (x-1) - 2y + (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): x - 2y + z - 2 = 0.$$

Vậy, phương trình của mặt phẳng (P): $x - 2y + z - 2 = 0$.

Bài tập 12. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\overrightarrow{AB}(0; -1; 0) \text{ và } \overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1; 0; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-1;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\overrightarrow{AB}(0; -1; 0) \text{ và } \overrightarrow{AC}(-1; 0; 1) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 0; -1)$$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

  $\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}$

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{OM}$ và vectơ $\overrightarrow{ON}$ ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{VCT}}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ 0\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\ 1\ \boxed{=}\ 0\ \boxed{=}$$

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{VCT}}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\ 1\ \boxed{=}\ 0\ \boxed{=}\ 1\ \boxed{=}$$

- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{VCT}}\ \boxed{3}\ 1\ \boxed{\times}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{VCT}}\ \boxed{3}\ 2\ \boxed{=}\qquad \boxed{\qquad\qquad -1}$$

$$\boxed{\blacktriangleright}\qquad \boxed{\qquad\qquad 0}$$

$$\boxed{\blacktriangleright}\qquad \boxed{\qquad\qquad -1}\ .$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(1;1;0)\\ \text{vtpt } \vec{n}(-1;0;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \qquad (1)$$

Vì A, B, C thuộc (P), ta được: $\begin{cases}A+B+D=0\\ A+D=0\\ B+C+D=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=-D\\ B=0\\ C=-D\end{cases}.$

Từ đó ta được: $(P): -Dx - Cz + D \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải):

Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án A ta nhận thấy:

  $1 + 1 - 1 \neq 0 \Rightarrow A \notin (P)$

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với (P) cho bởi đáp án B ta nhận thấy:

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow B \in (P)$

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow C \in (P)$

- Với (P) cho bởi đáp án C ta nhận thấy:

  $1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow A \in (P)$

  $0 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow B \notin (P)$

  $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái):

Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án D ta nhận thấy:

  $1 + 1 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow A \notin (P)$

  Đáp án D bị loại.

- Với (P) cho bởi đáp án C, ta nhận thấy:

  $1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow A \in (P)$

  $0 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow B \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

- Với (P) cho bởi đáp án B ta nhận thấy:

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow B \in (P)$

  $1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow C \in (P)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 13. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*:

Nhận xét rằng A, B, C theo thứ tự thuộc ba trục toạ độ, do đó:

$$(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow (ABC): 6x + 3y + z - 6 = 0.$$

Vậy, phương trình của mặt phẳng (ABC): $6x + 3y + z - 6 = 0$.

Bài tập 14. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng (P) đi qua M(1, 1, 1) có dạng:

$(P): n_1(x - 1) + n_2(y - 1) + n_3(z - 1) = 0$, với $n_1, n_2, n_3 > 0$

$\Leftrightarrow (P): n_1x + n_2y + n_3z - n_1 - n_2 - n_3 = 0.$

Khi đó, toạ độ của A, B, C là:

$$A\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_1}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_1}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_1}\right)$$

Thể tích tứ diện OABC, được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\frac{(n_1 + n_2 + n_3)^3}{n_1.n_2.n_3} \overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{1}{6}.\frac{27.n_1.n_2.n_3}{n_1.n_2.n_3} = \frac{9}{2}.$$

Vậy $(V_{OABC})_{Min} = \frac{9}{2}$, đạt được khi $n_1 = n_2 = n_3$ và khi đó:

$(P): x + y + z - 3 = 0.$

Bài tập 15.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x, y, z) \in (P_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ và } M_0 \text{ khác phía với } (P) \\ d(M,(P)) = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 4y + z + 1)(3.1 + 4.2 + 1) < 0 \\ \dfrac{|3x + 4y + z + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + z + 1 < 0 \\ |3x + 4y + z + 1| = 4\sqrt{26} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y + z + 1 + 4\sqrt{26} = 0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P_1).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

Bài tập 16. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, điểm $M(x; y; z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ và } M_0 \text{ cùng phía với } (P_1) \\ M \text{ và } M_0 \text{ cùng phía với } (P_2) \\ d(M,(P_1)) = d(M,(P_2)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3y + z + 1)(2.0 + 3.1 + 0 + 1) > 0 \\ (3x + 2y - z - 3)(3.0 + 2.1 - .0 - 3) > 0 \\ \dfrac{|2x + 3y + z + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \dfrac{|3x + 2y - z - 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z + 1 > 0 \\ 3x + 2y - z - 3 < 0 \\ 2x + 3y + z + 1 = -(3x + 2y - z - 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5x + 5y - 2 = 0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

Bài tập 17. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta lần lượt thực hiện.

- Phương trình mặt phẳng (ABC) được xác định bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(3;1;0) \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(3;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(1;0;-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ABC): x - 2z - 3 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (BCD) được xác định bởi:

$$(BCD): \begin{cases} \text{qua } B(1;0;-1) \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{BD} \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): \begin{cases} \text{qua } B(1;0;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(0;1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (BCD): y + 2z + 2 = 0.$$

Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (A, BC, D). Khi đó, điểm $M(x; y; z) \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ và } A \text{ cùng phía với } (BCD) \\ M \text{ và } D \text{ cùng phía với } (ABC) \\ d(M,(ABC)) = d(M,(BCD)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+2z+2)(1+2) > 0 \\ (x-2z-3)(4-3) > 0 \\ \dfrac{|x-2z-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|y+2z+2|}{\sqrt{1^2+2^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z+2 > 0 \\ x-2z-3 > 0 \\ y+2z+2 = x-2z-3 \end{cases} \Leftrightarrow x - y - 4z - 5 = 0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

Bài tập 18. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 19. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 20. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 1)$.

a. Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại phương trình của $(Q_{\alpha,\beta})$ dưới dạng:

$$(Q_{\alpha,\beta}): (\alpha + \beta)x + (\alpha - 2\beta)y - (2\alpha - \beta)z - 5\alpha + 4\beta = 0$$

khi đó $(Q_{\alpha,\beta})$ có vtpt $\overrightarrow{n_{\alpha,\beta}}(\alpha + \beta, \alpha - 2\beta, -2\alpha + \beta)$.

Nhận xét rằng: $\vec{n}.\overrightarrow{n_{\alpha,\beta}} = 1.(\alpha + \beta) + 1(\alpha - 2\beta) + 1.(-2\alpha + \beta) = 0$

tức là, với mọi α, β luôn có (P) và $(Q_{\alpha,\beta})$ vuông góc với nhau.

Cách 2: Nhận xét rằng họ $(Q_{\alpha,\beta})$ thuộc chùm tạo bởi đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

và (d) có vtcp $\vec{a}(1; 1; 1)$.

Suy ra $\vec{a} \,//\, \vec{n} \Leftrightarrow (P) \perp (d) \subset (Q_{\alpha,\beta}) \Leftrightarrow (P) \perp (Q_{\alpha,\beta})$, đpcm.

b. Từ giả thiết, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{|(\alpha+\beta).1 + (\alpha - 2\beta).1 - (2\alpha - \beta).1 - 5\alpha + 4\beta|}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha - 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha^2 - 13\alpha\beta + 5\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha = \dfrac{5\beta}{8} \end{array}\right..$$

- Với $\alpha = \beta$, ta được (Q_1): $2x - y - z - 1 = 0$.
- Với $\alpha = \frac{5\beta}{8}$, ta được (Q_2): $13x - 11y - 2z + 7 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thuộc họ $(Q_{\alpha,\beta})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 21.

1. Ta đi tìm m để (P) và (Q_m) song song với nhau, điều kiện là:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{1} = \frac{m+2}{2} = \frac{2m+3}{3} \neq \frac{-4m-6}{-6}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với mọi m (P) và (Q_m) không thể song song với nhau.

Viết lại phương trình của (Q_m) dưới dạng:

$$(Q_m): x + 2y + 3z - 6 + m(x + y + 2z - 4) = 0$$

suy ra (Q_m) luôn chứa đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Nhận xét rằng: $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 0) \in (d) \Rightarrow A, B \in (P) \Rightarrow (d) \subset (P)$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cố định luôn thuộc (P) và (Q_m).

2. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q_m), ta được:

$\overrightarrow{n_P}(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{n_Q}(m + 1; m + 2; 2m + 3)$.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để $(P) \equiv (Q_m)$, điều kiện là:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \Leftrightarrow \frac{m+1}{1} = \frac{m+2}{2} = \frac{2m+3}{3} = \frac{-4m-6}{-6}$$

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Để $(P)\perp(Q_m)$, điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 1.(m + 1) + 2.(m + 2) + 3.(2m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{14}{9}.$$

Vậy, với $m = -\frac{14}{9}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*:

Để cosin góc giữa (P) và (Q_m) bằng $\frac{5}{2\sqrt{7}}$, điều kiện là: $\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}$

$$= \frac{5}{2\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{|1.(m+1)+2.(m+2)+3.(2m+3)|}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2+(2m+3)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 9m + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\frac{7}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, với m = −1 hoặc $m = -\frac{7}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 22. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Nhận xét rằng (P) và (Q) cùng đi qua đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + 3y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng

⇔ (d) ∈ (R) ⇔ hai điểm A(1; 1; 2) và B(0; $\frac{1}{3}$; 3) thuộc (d) cũng thuộc (R)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - (\alpha + \beta) + 2\beta - 1 = 0 \\ \frac{1}{3}(\alpha + \beta) + 3\beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $\alpha = 5$ và $\beta = 1$ ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua (d).

✍ *Lời giải tự luận 2*: Nhận xét rằng (P) và (Q) cùng đi qua đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + 3y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng

⇔ (R) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d)

⇔ (R) thuộc chùm mặt phẳng có phương trình

$$A(x + 3y - z + 2) + B(2x - 3y + 1) = 0$$

⇔ (R) thuộc chùm mặt phẳng có phương trình

$$(A + 2B)x + (3A - 3B)y - Az + 2A + B = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = A + 2B \\ -\alpha - \beta = 3A - 3B \\ \beta = -A \\ -1 = 2A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $\alpha = 5$ và $\beta = 1$ ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua đường thẳng (d).

Bài tập 23. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*:

Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$, $\overrightarrow{n_R}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), (R), ta được:

$$\overrightarrow{n_P}(1; 1; 1),\ \overrightarrow{n_Q}(\alpha; -2; \beta),\ \overrightarrow{n_R}(\alpha; \alpha - \beta; -\beta).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \\ \overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2 + \beta = 0 \\ \alpha + \alpha - \beta - \beta = 0 \\ \alpha^2 - 2(\alpha - \beta) - \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1.$$

Khi đó, toạ độ điểm chung I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-6=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow I(1;\,2;\,3).$$

Bài tập 24.

a. Gọi (d) là đường thẳng có phương trình (d): $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$.

Dễ thấy, mặt phẳng (P_m) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d).

Vậy (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng (P_0) có phương trình:

(P_0): $2x + y + z - 1 = 0$ có một vtpt $\vec{n}_0(2;\,1;\,1)$.

Chuyển phương trình (P_m) về dạng:

(P_m): $(2 + m)x + (1 + m)y + (1 + m)z - 1 + m = 0$ (1)

Khi đó (P_m) có một vtpt $\vec{n}_m(2 + m;\,1 + m;\,1 + m)$.

Vì $(P_m) \perp (P_0) \Leftrightarrow \vec{n}_m.\vec{n}_0 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(2 + m) + 1 + m + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Thay $m = -\frac{3}{2}$ vào (1), ta được $(P_{-\frac{3}{2}})$: $x - y - z - 5 = 0$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}(0;\,-1;\,1).$$

Lấy một điểm $A(2;\,0;\,-3) \in (d)$, khi đó khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng (d) được cho bởi: $d(A,(d)) = \dfrac{|[\overrightarrow{OA},\vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Bài tập 25.

a. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} m+2=0 \\ \dfrac{m+1}{1} = \dfrac{m-1}{3} = \dfrac{-3m-1}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$

Vậy, (P) thuộc một chùm mặt phẳng (P_m) ứng với $m = -2$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Viết lại phương trình chùm (P_m) dưới dạng:

(P_m): $2x + y - z - 1 + m(x + y + z - 3) = 0$.

Vậy, chùm mặt phẳng (P_m) được tạo bởi trục (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Lấy hai điểm phân biệt A(0; 2; 1), B(−2; 5; 0) ∈ (d).

Để $(Q) \subset (P_m) \Leftrightarrow A, B \in (Q)$, ta được: $\begin{cases} \beta.2 - (\alpha + 1) + 2 = 0 \\ \alpha.(-2) + \beta.5 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$.

Vậy, với $\alpha = 1$ và $\beta = 0$ ta được $(Q) \subset (P_m)$.

Bài tập 26. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Chùm mặt phẳng $(Q_{\alpha,\beta})$ được tạo bởi trục (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Lấy hai điểm phân biệt $A(\frac{31}{10}; \frac{9}{10}; 0)$, $B(\frac{1}{7}; 0; \frac{18}{7}) \in (d)$.

Để $(P) \subset (Q_{\alpha,\beta}) \Leftrightarrow A, B \in (P)$, ta được:

$$\begin{cases} 5.\dfrac{31}{10} + n.\dfrac{9}{10} + 4.0 + m = 0 \\ 5.\dfrac{1}{7} + n.0 + 4.\dfrac{18}{7} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ n = -5 \end{cases}.$$

Vậy với $m = -11$ và $n = -5$ ta được (P) thuộc chùm $(Q_{\alpha,\beta})$.

Bài tập 27.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát

$$(d): \begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z - 9 = 0 \end{cases}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d)

- (P) thuộc chùm tạo bởi (d) có dạng:

$$(P): A(4x - 3y + 3) + B(x - 3z - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (4A + B)x - 3Ay - 3Bz + 3A - 9B = 0. \qquad (1)$$

- Điểm $A \in (P)$

$$\Leftrightarrow (4A + B) - 3A.2 - 3B + 3A - 9B = 0 \Leftrightarrow A = 11B.$$

Thay $A = 11B$ vào (1) ta được

$$(P): 15x - 11y - z + 8 = 0.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}(3; 4; 1)$, và lấy điểm $B(0; 1; -3) \in (d)$.

Khoảng cách từ A đến (d) được cho bởi: $d(A, (d)) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \sqrt{\dfrac{347}{26}}$.

Bài tập 28.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Khoảng cách từ M đến (P) được cho bởi:

$$d(M, (P)) = \frac{|2.1 - 1.0 + 3.5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{14}}.$$

b. Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q), có dạng:

$$(d): \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm.

- (R) chứa (d) ⇒ (R) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (d), có dạng:

$$(R): A(2x - y + 3z + 1) + B(x + y - z + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A + B)x - (A - B)y + (3A - B)z + A + 5B = 0. \ (1)$$

Khi đó (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(2 + m; -1 + m; 3 - m)$.

- Vì (R) vuông góc mặt phẳng (T)

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_T} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_T} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A + B).3 + (-A + B).(-1) + (3A - B).0 = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{7A}{2}.$$

Thay $B = -\dfrac{7A}{2}$ vào (1), ta được (R): $3x + 9y - 13z + 33 = 0$.

Bài tập 29. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(1; -3; -1)$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$(P): A(x + y - 2) + B(4y + z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): Ax + (A + 4B)y + Bz - 2A - 2B = 0. \quad (1)$$

khi đó (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(A, A + 4B, B)$.

Để (P) // (Q) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} // \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \frac{A}{1} = \frac{A+4B}{-3} = \frac{B}{-1} \Leftrightarrow B = -A$.

Thay $B = -A$ vào (1), ta được: (P): $x - 3y - z = 0$.

Bài tập 30. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d_2), khi đó $\vec{a}(a; 2; -3)$.

(P) chứa $(d_1) \Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (d_1), có dạng:

$$(P): A(x + 2y - 3z + 1) + B(2x - 3y + z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (A + 2B)x + (2A - 3B)y + (B - 3A)z + A + B = 0. \quad (1)$$

khi đó (P) có vtpt $\vec{n}_1(A + 2B; 2A - 3B; B - 3A)$.

a. Vì (P) // (d_2)

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{a} \Leftrightarrow a(A + 2B) + 2(2A - 3B) - 3(B - 3A) = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(13+a)A}{9-2a}.$$

Thay $B = \frac{(13+a)A}{9-2a}$ vào (1), ta được

$$(P): 35x - (11 + 7a)y + 7(a - 2)z + 22 - a = 0.$$

b. Vì $(P) \perp (d_2)$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{a} \Leftrightarrow \frac{A+2B}{a} = \frac{2A-3B}{2} = \frac{B-3A}{-3} \Rightarrow B = 0.$$

Thay $B = 0$ vào (1), ta được: (P): $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Bài tập 31. Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của (Q), khi đó $\overrightarrow{n_Q}(1; 2; -2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần xác định.

- (P) chứa (d) $\Rightarrow$ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$(P): A(x + y - 2) + B(y + z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): Ax + (A + B)y + Bz - 2A - 2B = 0. \quad (1)$$

khi đó (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(A, A + B, B)$.

- Hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc α khi và chỉ khi:

$$\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}=\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{|A.1+(A+B).2+B.(-2)|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{A^2+(A+B)^2+B^2}}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2A^2-AB-B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=A \\ B=-2A \end{array}\right..$$

- Với $B = A$ vào (1) được (P_1): $x + 2y + z - 4 = 0$.
- Với $B = -2A$ vào (1) được (P_2): $x - y - 2z + 2 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 32. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (Δ), ta có $\vec{a}(2; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần xác định.

- (P) chứa (d) ⇒ (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$(P): A(x + y - 2) + B(y + z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): Ax + (A + B)y + Bz - 2A - 2B = 0. \qquad (1)$$

khi đó (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(A; A + B; B)$.

- Mặt phẳng (P) tạo với đường thẳng (Δ) một góc bằng 60^0

$$\Leftrightarrow \sin60^0 = \frac{|2.A+(A+B).1+B.(-1)|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{A^2+(A+B)^2+B^2}}$$

$$\Leftrightarrow B^2 + AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=-A \\ B=0 \end{array}\right..$$

- Với $B = -A$, thay vào (1), ta được (P_1): $x - z = 0$.
- Với $B = 0$, thay vào (1), ta được (P_2): $x + y - 2 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 33.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $d(M, (P)) = \dfrac{|2.4-1-3+4|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}}$.

b. Gọi (R) là mặt phẳng cần xác định.

- (R) chứa (d) ⇒ (R) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$(R): A(2x - y + z - 4) + B(x + y - 3z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (R): (2A + B)x + (B - A)y + (A - 3B)z - 4A - B = 0. \quad (1)$$

- Khoảng cách từ M tới (R) bằng $\sqrt{13}$, ta được:

$$\sqrt{13} = \frac{|4(2A+B)-(B-A)-3(A-3B)-4A-B|}{\sqrt{(2A+B)^2+(B-A)^2+(A-3B)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 37A^2 - 48AB + 11B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = \dfrac{11B}{37} \end{array}\right.$$

- Với A = B, thay vào (1), ta được: (P_1): $3x - 2z - 5 = 0$.
- Với $A = \dfrac{11B}{37}$, thay vào (1), ta được (P_2): $59x + 26y - 100z - 81 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 34.

a. Xét mặt cầu (S), suy ra tâm I(1, 0, 1) và bán kính $R = \sqrt{2+m^2}$.

Khoảng cách từ điểm I(1, 0, 1) đến mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$d = \frac{|3.1+6.0-2.1-22|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = 3.$$

So sánh d với R, ta xét: $d^2 - R^2 = 7 - m^2$.

- Nếu $7 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{7}$, suy ra:

  $d^2 - R^2 > 0 \Leftrightarrow d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$.

- Nếu $7 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$, suy ra:

  $d^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

- Nếu $7 - m^2 < 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{7}$, suy ra:

  $d^2 - R^2 < 0 \Leftrightarrow d < R$

  $(P) \cap (S) = (C)$ là đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z-m=0 \\ 3x+6y-2z-22=0 \end{cases}$$

và có bán kính: $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{m^2-7}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Đường tròn (C) có diện tích bằng π

$$\Leftrightarrow \pi.r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Bài tập 35. Mặt cầu (S_1) đi qua các giao điểm của (P) với (S), có dạng:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 1 + m(x + y + z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (S_1): x^2 + y^2 + z^2 + mx + my + mz - 1 - m = 0 \qquad (1)$$

suy ra tâm $I(-\frac{m}{2}; -\frac{m}{2}; -\frac{m}{2})$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + m + 1}$.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Điểm $A(2, 1, -1) \in (S)$ nên:

$$4 + 1 + 1 - 1 + m(2 + 1 - 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -5.$$

Thay $m = -5$ vào (1) ta được

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 5y - 5z + 4 = 0.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Tâm $I \in (Q)$ nên: $-\frac{m}{2} - \frac{m}{2} + 2(-\frac{m}{2}) + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thay $m = 1$ vào (1) ta được $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2 = 0$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: (S_1) tiếp xúc với (Q) nên:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|-\frac{m}{2} + 1|}{\sqrt{1}} = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + m + 1} \Leftrightarrow 2m^2 + 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -4 \end{array}\right..$$

- Với $m = 0$ vào (1) ta được $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
- Với $m = -4$ vào (1) ta được $(S'_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 36. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(O, (P)) = R \Leftrightarrow R = \frac{75}{\sqrt{16^2 + 15^2 + 12^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm O, tiếp xúc với (P), có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Bài tập 37. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow R = \frac{|3.1 - 4.2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có tâm I, tiếp xúc với (P), có dạng:

$$(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9.$$

Bài tập 38. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận:* Ta có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M, suy ra I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(-3,1,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Suy ra $I(-3+2t, 1+2t, 1+t)$.

- (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right..$$

- Với $t_1 = 1$, suy ra tâm $I_1(-1, 3, 2)$, khi đó được (S_1) có phương trình là:

  $$(S_1): (x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9.$$

- Với $t_2 = -1$, suy ra tâm $I_2(-5, -1, 0)$, khi đó được (S_2) có phương trình là: $(S_2): (x+5)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý:

1. Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho trường hợp mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng với hai tiếp điểm – *Đề nghị bạn đọc tự suy luận.*
2. Từ việc biết cách lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với một mặt phẳng, rồi với hai mặt phẳng cho trước chúng ta tiến gần tới bài toán lập phương trình mặt cầu nội tiếp khối đa diện, tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng ta cần quan tâm tới dạng đặc thù của đa diện để có được lời giải ngắn gọn, cụ thể ta cân nhắc lựa chọn một trong hai hướng sau (minh hoạ cho hình chóp):

Hướng 1: Tổng quát, ta có thể lựa chọn một trong hai cách để thực hiện:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử (S) có tâm I(a, b, c), bán kính r.

Bước 2: Từ điều kiện tiếp xúc của (S) và các mặt của hình chóp (khoảng cách từ I đến các mặt bằng r) ta được hệ (I) theo các ẩn a, b, c, r.

Bước 3: Giải (I), được a, b, c, r. Từ đó suy ra phương trình của (S).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện tạo bởi các mặt bên và đáy.

Bước 2: Vì tâm I của mặt cầu (S) cách đều tất cả các mặt của hình chóp do đó toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình của các mặt phẳng phân giác trên.

Bước 3: Bán kính r = d(I, (Q)) với (Q) là một mặt bất kỳ của hình chóp.

Hướng 2: Dựa trên dạng đặc biệt của hình chóp, tức là:

1. Nếu chỉ ra được điểm M thuộc mặt phẳng đáy cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp. Ta thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (SM).

   Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng phân giác (P) của một góc nhị diện tạo bởi một mặt bên và đáy.

   Bước 3: Khi đó $\{I\} = (P) \cap (SM)$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (SM) vào (P), ta được giá trị tham số t.

   $\Rightarrow$ toạ độ I và bán kính r = d(I, (Q)) với (Q) là một mặt bất kỳ của hình chóp.

2. Với hình chóp SABC đều, ta được:

   Tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SG và thoả mãn:

   $$\frac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{IG}} = -\frac{SM}{GM},$$

   trong đó G là trọng tâm ΔABC và M là trung điểm AB.

   Bán kính $r^2 = IG^2$.

3. Với tứ diện OABC có A, B, C theo thứ tự thuộc các trục toạ độ Ox, Oy, Oz, khi đó:

   - Tâm I thuộc tia phân giác của góc tam diện $\frac{1}{8}$ không gian toạ độ thứ k ($k = \overline{1,8}$).
   - Bán kính r được xác định bởi: $r = |x_I| = d(I, (ABC))$.

Bài tập 39.

a. Ta lần lượt có:

- Phương trình mặt phẳng (SAB) cho bởi:

$$(SAB): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SA} \text{ và } \overrightarrow{SB} \end{cases} \Leftrightarrow (SAB): \begin{cases} \text{qua } S(0, 0, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (SAB):\ y + z - 2 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (SBC) cho bởi:

$$(SBC): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SB} \text{ và } \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow (SBC): \begin{cases} \text{qua } S(0, 0, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(4, 3, -5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (SBC):\ 4x + 3y - 5z + 10 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (SCD) cho bởi:

$$(SCD): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SC} \text{ và } \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SCD): \begin{cases} \text{qua } S(0, 0, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_3}(0, -1, 1) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow (SCD):\ y - z + 2 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (SAD) cho bởi:

$$(SAD): \begin{cases} \text{qua } S \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SA} \text{ và } \overrightarrow{SD} \end{cases} \Leftrightarrow (SAD): \begin{cases} \text{qua } S(0, 0, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_4}(4, -3, 5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (SAD):\ 4x - 3y + 5z - 10 = 0.$$

b. Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 theo thứ tự là khoảng cách từ O tới các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SAD), ta được $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \sqrt{2}$.

Vậy điểm O cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Theo b) mặt cầu nội tiếp hình chóp có tâm I nằm trên đoạn SO và mặt phân giác của góc nhị diện (S, AD, B). Ta có:

- Phương trình đường thẳng (SO) cho bởi:

$$(SO): \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{vtcp } \overrightarrow{OS}(0, 0, 2) \end{cases} \Leftrightarrow (SO): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Phương trình mặt phẳng (ABD): $z = 0$.
- Gọi (P) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (S, AD, B). Khi đó, điểm $M(x, y) \in (P)$ điều kiện là:

$$\begin{cases} M \text{ và } S \text{ cùng phía với } (ABD) \\ M \text{ và } B \text{ cùng phía với } (SAD) \\ d(M, (ABD)) = d(M, (SAD)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z.2 > 0 \\ (4x - 3y + 5z - 10)(-16 - 6 - 10) > 0 \\ \dfrac{|z|}{\sqrt{1^2}} = \dfrac{|4x - 3y + 5z - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y + 5(1 + \sqrt{2})z - 10 = 0.$$

- Vì $\{I\} = (P) \cap (SO)$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (SO) vào (P), ta được $t = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Khi đó, mặt cầu (S) nội tiếp hình chóp có tâm $I(0, 0, 2\sqrt{2} - 2)$ và bán kính

$$r = d(I, (ABD)) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Vậy, mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + (z - 2\sqrt{2} + 2)^2 = 12 - 8\sqrt{2}.$$

Chú ý: Có thể lập luận như sau:

- Điểm I nằm trong đoạn SO suy ra

$$I(0, 0, t) \text{ và } \overrightarrow{IS} = k\overrightarrow{IO} \text{ vớ } k < 0. \qquad (*)$$

- Từ điều kiện

$$d(I, (SAB)) = d(I, (ABCD)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|t - 2|}{\sqrt{2}} = |t| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2(\sqrt{2} - 1) \\ t = -2(\sqrt{2} + 1) \ (l) \end{array}\right.$$

Bài tập 40.

a. Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (1)$$

Từ phương trình (1), ta được $\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{2z}{c} = 2$

và theo giả thiết (*), suy ra điểm $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in (ABC)$.

Vậy, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b. Tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC nằm trên tia phân giác góc tam diện phần tám không gian toạ độ thứ nhất, do đó:

$$I(p, p, p), \text{ với } 0 < p < \text{Min}\{a, b, c\}.$$

Mặt khác, ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Leftrightarrow bc + ca + ab = 2abc$,

$$r = p \Leftrightarrow \frac{|bc.p + ca.p + ab.p - abc|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} = p \Leftrightarrow \frac{|2abcp - abc|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} = p$$

$$\Leftrightarrow r = p = \frac{abc}{2abc + \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}. \qquad (2)$$

Vậy, tâm I(p, p, p) và bán kính r = p với p cho bởi (2).

c. Ta có:

$$2abc = bc + ca + ab \le \sqrt{3}.\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \ge \frac{2abc}{\sqrt{3}}$$

do đó: $$r = \frac{abc}{2abc + \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} \le \frac{abc}{2abc + \frac{2abc}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}. \quad (3)$$

Mặt khác: $\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} < bc + ca + ab = 2abc$

do đó: $$r = \frac{abc}{2abc + \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} > \frac{abc}{2abc + 2abc} = \frac{1}{4}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được: $\frac{1}{4} < r \le \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Nhận xét: Như vậy thông qua các ví dụ trên chúng ta đã khai thác điều kiện tiếp xúc của mặt cầu với mặt phẳng để lập được phương trình mặt cầu, tiếp theo chúng ta sẽ khai thác tính chất của đường tròn (C) được tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng. Ta phát biểu bài toán dưới dạng:

" *Lập phương trình mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn (C) và thoả mãn điều kiện K* ".

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R.

Bước 2: $(S) \cap (P) = (C)$ có bán kính r, khi và chỉ khi:

$$R^2 = r^2 + d^2. \quad (1)$$

trong đó d = d(I, (P)).

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để thiết lập thêm các phương trình theo a, b, c, R. Từ đó xác định được toạ độ tâm I và bán kính R

Bước 4: Khi đó, phương trình (S) được cho bởi:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Chú ý:

1. Nếu $d = d(I, (P)) = 0 \Rightarrow r = R$ và $I \equiv H$. Ta gọi C(I, R) là đường tròn lớn của mặt cầu S(I, R).
2. Nếu (C) có diện tích bằng s thì: $\pi r^2 = s$.
3. Nếu (C) có chu vi bằng p thì: $2\pi r = p$.

4. Nếu giả thiết cho (C) có tâm $H(x_0, y_0, z_0)$, suy ra tâm I thuộc đường thẳng (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } H(x_0, y_0, z_0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(A, B, C) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \text{ , } t \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

Suy ra $I(x_0 + At, y_0 + Bt, z_0 + Ct)$.

Bài tập 41.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) thoả mãn điều kiện đầu bài có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì A, B, C ∈ (S), ta được: $\begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 13 - 6b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ b = a \\ c = 3 - a \end{cases}$. (I)

Gọi d là khoảng cách từ I tới mặt phẳng (P), ta được:

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2a + 2b + c|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|2a + 2b + c|}{3}.$$

Ta có (Q) ∩ (S) = (C) có bán kính 1, ta có:

$$R^2 = r^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \left(\frac{2a + 2b + c}{3}\right)^2$$

$$\overset{(I)}{\Leftrightarrow} a^2 + a^2 + (3 - a)^2 - (2a - 1) = 1 + \left(\frac{2a + 2b + 3 - a}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 4 \end{array}\right..$$

- Với a = 1, ta được b = 1, c = 2 và d = 1, suy ra:

  $$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 1 = 0.$$

- Với a = 4, ta được b = 4, c = −1 và d = 7, suy ra:

  $$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y + 2z + 7 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 42.

a. Nhận xét rằng các điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$, do đó:

$$(OAB) \equiv (Oxy),\ (OBC) \equiv (Oyz),\ (OCA) \equiv (Oxz),$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (ABC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC nằm trên tia phân giác góc tam diện $\frac{1}{8}$ không gian toạ độ thứ nhất, do đó: $I(a, a, a)$, với $0 < a < 1$.

Mặt khác, ta có:

$$r = a \Leftrightarrow \frac{|6a + 3a + 2a + 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = a \Leftrightarrow |12a + 6| = 7a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Vậy, tâm $I(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Bài tập 43.

a. Ta có $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6}$ (đvtt).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ điều kiện } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ các điều kiện:

- Điểm $A \in (S) \Leftrightarrow 2a + 4c - d = 5.$ (1)
- Điểm $B \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b - d = 2.$ (2)
- Điểm $C \in (S) \Leftrightarrow 2c - d = 1.$ (3)
- Điểm $D \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c - d = 3.$ (4)

Giải hệ bởi (1), (2), (3) và (4), ta được

$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{2},\ d = 0 \text{ (tmđk)}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z = 0 \Rightarrow \text{tâm } I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Gọi (P) là mặt phẳng qua A tiếp xúc với (S), ta được:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1, 0, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AI}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y + 3z - 7 = 0.$$

Bài tập 44. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Mặt cầu (S) có tâm I(1, 2, 3) và bán kính R = 4.

Gọi (Q) mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) và song song với (P), khi đó:

- (Q) // (P), suy ra: (Q): $4x + 3y - 12z + d = 0$ (1)
- (Q) tiếp xúc với (S) suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + d|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = -26 \\ d_2 = 78 \end{array}\right..$$

- Với $d_1 = -26$ thay vào (1), ta được:

  (Q_1): $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
- Với $d_2 = 78$ thay vào (1), ta được:

  (Q_2): $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Vậy có hai tiếp diện (Q_1), (Q_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Giả sử điểm $T(x_0, y_0, z_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

- Phương trình tiếp diện có dạng:

  $$(Q): (x - 1)(x_0 - 1) + (y - 2)(y_0 - 2) + (z - 3)(z_0 - 3) = 16. \quad (2)$$
- Điểm $T \in (S)$ nên $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0 - 4y_0 - 6z_0 - 2 = 0$. (3)

Vì (Q) // (P), suy ra: $\frac{x_0 - 1}{4} = \frac{y_0 - 2}{3} = \frac{z_0 - 3}{-12}$. (I)

Giải hệ phương trình tạo bởi (2) và (I), ta được:

$$T_1(\frac{29}{13}, \frac{38}{13}, -\frac{9}{13}) \text{ và } T_2(-\frac{3}{13}, \frac{14}{13}, \frac{87}{13}).$$

- Với T_1, ta được tiếp diện (Q_1): $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
- Với T_2, ta được tiếp diện (Q_2): $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Bài tập 45. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2, -3, 2)$, $\vec{a}_2(3, -2, 0)$.

Gọi I, R theo thứ tự là tâm và bán kính mặt cầu (S), ta có:

$I(5, -1, -13)$ và $R = \sqrt{308}$.

Gọi (P) là mặt phẳng có vtpt $\vec{n}$, song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2) và tiếp xúc với mặt cầu (S), ta có:

$$\begin{cases}(P)//(d_1)\\(P)//(d_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp a_1\\\vec{n}\perp a_2\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix}-3 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -3\\3 & -2\end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{n}(4, 6, 5)$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

(P): $4x + 6y + 5z + D = 0$

(P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4.5 + 6.(-1) + 5.(-13) + D|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D_1 = -103\\D_2 = 205\end{array}\right.$$

- Với $D_1 = -103$, ta được

  (P_1): $4x + 6y + 5z - 103 = 0$.
- Với $D_2 = 205$, ta được

  (P_2): $4x + 6y + 5z + 205 = 0$.

Vậy, có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 46. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1, 2, 3)$ và bán kính $R = 3$.

a. Nhận xét rằng $M(1,1,1) \in (S)$, vậy phương trình tiếp diện của (S) tại M có dạng:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } M(1,1,1)\\\text{vtpt } \overrightarrow{MI}(2, -1, -2)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

b. Mặt phẳng (P) vuông góc với vectơ $\vec{a}$ nên:

(P) có vtpt là $\vec{a}(2; 1; -2)$, có dạng: $2x + y - 2z + D = 0$. (2)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.(-1) + 2 - 2.3 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D = -3\\D = 15\end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D = -3$ vào (2), ta được (P_1): $2x + y - 2z - 3 = 0$.
- Với $D = 15$ vào (2), ta được (P_2): $2x + y - 2z + 15 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 3

ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa: Một vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương (viết tắt vtcp) của đường thẳng (d) nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của (d).
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtcp của nó và một điểm mà nó đi qua.

2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta có: $(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1;a_2;a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Phương trình (1) với điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu $a_1 = 0$, ta được: $(d): \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

   là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(0;\ a_2;\ a_3)$ do đó nó vuông góc với Ox (song song với mặt phẳng Oyz), cắt Ox tại điểm có hoành độ x_0.

2. Nếu $a_2 = 0$, ta được: $(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 \qquad\quad ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

   là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1;\ 0;\ a_3)$ do đó nó vuông góc với Oy (song song với mặt phẳng Oxz), cắt Oy tại điểm có tung độ y_0.

3. Nếu $a_3 = 0$, ta được: (d): $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 \end{cases}$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; 0)$ do đó nó vuông góc với Oz (song song với mặt phẳng Oxy), cắt Oz tại điểm có cao độ z_0.

3. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta có: (d): $\begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Leftrightarrow$ (d): $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

Từ đó, đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$ và $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Vì đường thẳng (d) trong không gian có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) nào đó, nên phương trình tổng quát của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

với điều kiện $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

trong đó (1), (2) theo thứ tự là phương trình của mặt phẳng (P_1), (P_2).

Khi đó, một vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng đó được xác định bởi:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

5. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Gọi $\alpha = g((d_1),(d_2))$, $0 \le \alpha \le 90^0$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), khi đó:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}. \qquad (5)$$

Nhận xét rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

6. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian Oxyz, cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$. Khi đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M, (d)) = \frac{|[\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$$, trong đó M_0 là điểm bất kỳ thuộc (d).

7. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định lý: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2) theo thứ tự có vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Khi đó khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|},$$

trong đó M_1, M_2 là các điểm bất kỳ theo thứ tự thuộc (d_1), (d_2).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Phương trình đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

1. Phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, t \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$.

Khi đó vectơ $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ là một vtcp của đường thẳng (d).

2. Phương trình: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi

$$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2 \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \neq \vec{0}.$$

Khi đó vectơ $\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$ là một vtcp của (d).

Chú ý: Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ (d_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số đường thẳng của họ (d_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định, để thực hiện yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử m từ hệ của phương trình (d), ta được:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m)] + \\ + \beta[A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + \\ + D_2(m)] = 0 \qquad (2)$$

Bước 2: Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β, đưa (2) về dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

Bước 3: Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho phương trình: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = 2 + (m-1)t \\ z = 3 + m(m-1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình đường thẳng.

A. $m > 1$. **B.** $m < 2$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** Mọi m.

b. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng luôn đi qua.

A. M(1; 2; 3). **B.** M(2; 2; 3). **C.** M(1; 2; 2). **D.** M(1; 1; 3).

Bài tập 2. Cho phương trình : $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-2}{m(m+2)} = \dfrac{mz-m}{0}$.

a. Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình đường thẳng.

A. $m \neq 0$. **B.** $m \neq -2$. **C.** $0 < m < 2$. **D.** Mọi m.

b. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng luôn đi qua.

A. M(1; 2; 3). **B.** M(1; 2; 1). **C.** M(2; 2; 2). **D.** M(3; 1; 3).

Bài tập 3. Cho phương trình : $\begin{cases} x+2y-mz+m=0 \\ 2x+(m+1)y-6z+6=0 \end{cases}$.

a. Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình đường thẳng.

A. $m \neq 0$. **B.** $m \neq 3$. **C.** $0 < m < 3$. **D.** Mọi m.

b. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng luôn đi qua.

A. M(1; 2; 0). **B.** M(1; 0; 1). **C.** M(0; 0; 1). **D.** M(2; 1; 3).

Bài tập 4. Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): \begin{cases} x+mz-m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

A. M(1; 2; 0). **B.** M(0; 0; 1). **C.** M(0; 0; 2). **D.** M(2; 1; 3).

b. Chứng minh rằng các đường thẳng trong họ (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

c. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ.

A. $V = \frac{1}{6}$. **B.** $V = \frac{1}{3}$. **C.** $V = \frac{1}{2}$. **D.** $V = \frac{5}{6}$.

Bài tập 5. Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): \begin{cases} x+4mz-3m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

A. $M(1; 1; \frac{1}{2})$. **B.** $M(1; 1; \frac{3}{4})$.

C. $M(0; 0; \frac{3}{4})$. **D.** $M(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{4})$.

b. Chứng minh rằng các đường thẳng trong họ (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

c. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ.

A. $V = \frac{1}{6}$. **B.** $V = \frac{1}{3}$. **C.** $V = \frac{5}{6}$. **D.** $V = \frac{9}{8}$.

Bài toán 2: Chuyển dạng phương trình đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét ba xuất phát điểm:

1. Với (d) cho dưới dạng *tổng quát*:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases} \text{ với } A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2.$$

Để chuyển (d) về dạng tham số, chính tắc ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi $\vec{a}$ là vtcp, ta có $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$.

Bước 2: Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (d)$.

Bước 3: Vậy, ta có: $(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases}$.

Từ đó ta có được :

- Phương trình tham số của (d).
- Phương trình chính tắc của (d).

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm $A, B \in (d)$.

Bước 2: Vậy, ta có: $(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Từ đó ta có được :

- Phương trình tham số của (d).
- Phương trình chính tắc của (d).

Chú ý: Với yêu cầu xác định phương trình tham số của đường thẳng (d) chúng ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách đặt $x = t$ (hoặc $y = t$ hoặc $z = t$) từ đó suy ra y và z theo t.

2. Với (d) cho dưới dạng *tham số*:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \qquad (I)$$

a. Bằng cách khử t từ hệ, ta sẽ nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng (d), cụ thể: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} a_2x - a_2x_0 = a_1y - a_1y_0 \\ a_3y - a_3y_0 = a_2z - a_2z_0 \end{cases}$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d).

b. Bằng cách rút t từ hệ, ta sẽ nhận được phương trình chính tắc của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = t \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = t \\ \dfrac{z - z_0}{a_3} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

3. Với (d) cho dưới dạng *chính tắc*: (d): $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$. (1)

a. Đơn giản phương trình trên ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x - a_2x_0 = a_1y - a_1y_0 \\ a_3y - a_3y_0 = a_2z - a_2z_0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d).

b. Bằng việc sử dụng tham số trung gian t ta nhận được phương trình tham số của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = t \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = t \\ \dfrac{z - z_0}{a_3} = t \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 6. Lập phương trình chính tắc và tham số của đường thẳng (d), biết:

$$(d): \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 7. Lập phương trình chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d), biết:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t - 3 \end{cases}.$$

Bài tập 8. Cho mặt phẳng (P) có phương trình: (P): $5x - 7y + 2z - 3 = 0$.

Lập phương trình tổng quát và tham số của các giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng toạ độ.

Bài tập 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình: (d): $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng (d)

Bài tập 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình: (d): $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Bài toán 3: Lập phương trình đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để lập phương trình đường thẳng (d), ta sử dụng các kết quả:

1. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp: (d): $\begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases}$

suy ra:

- Phương trình tham số của (d) có dạng: (d): $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$.
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng: (d): $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

2. Đường thẳng đi qua hai điểm: (d): $\begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \end{cases}$$

suy ra:

- Phương trình tham số của (d) có dạng: (d): $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$$(d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3. Đường thẳng được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng chứa nó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm M(1; 1; 2) và song song với đường thẳng (d), biết: (d): $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

A. $(\Delta): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}$. **C.** $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}$.

B. $(\Delta): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}$. **D.** $(\Delta): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{5}$.

Bài tập 12. Lập phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng qua điểm M(1; 1; 1) và vuông góc với mặt phẳng (P), biết: (P): $x + 2y + 3z - 12 = 0$.

Bài tập 13. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(2; 0; –3) và vuông góc với hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 14. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1; 1; –2), song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d), biết:

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}, (P): x - y - z - 1 = 0.$$

Bài tập 15. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(0; 1; 1) và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{1} = z, \quad (d_2): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}.$$

Bài tập 16. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. A(1; 1; 1) và (d_1): $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$, (d_2): $\begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

b. A(1; 1; 0) và (d_1): $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{1} = z$, (d_2): $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$.

Bài tập 17. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(1; 1; −2) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d_1), biết:

$$(P): x-y-z-1=0, \quad (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

Bài tập 18. Lập phương trình đường thẳng đi qua A(0; 1; 1) vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}, \quad (d_2): \begin{cases} x=2u \\ y=1+u, \ u \in \mathbb{R}. \\ z=u \end{cases}$$

Bài tập 19. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(−1; 2; −3), vuông góc với vectơ $\vec{a}$ (6; −2; −3) và cắt đường thẳng (d_2), biết:

$$(d_2): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}.$$

Bài tập 20. Lập phương trình đường thẳng đi qua A(1; 1; 1) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}.$$

Bài tập 21. Lập phương trình đường thẳng đi qua A(1, 1, 0) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \quad, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x=0 \\ y=0 \quad, u \in \mathbb{R}. \\ z=2+u \end{cases}$$

Bài tập 22. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{3},$$

$$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}, (d_2): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Bài tập 23. Cho điểm A(− 1, 2, 3), vectơ $\vec{a}$ (6, −2, −3) và đường thẳng (d) có phương trình: $(d): \begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 5x + 2z - 14 = 0 \end{cases}$.

a. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa A và (d).

b. Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua điểm A vuông góc với vectơ $\vec{a}$ và cắt đường thẳng (d).

Bài tập 24. Lập phương trình đường thẳng qua điểm A(−4; −5; 3) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, (d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

Bài tập 25. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

$$(\Delta): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}, (d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3},$$

$$(d_2): \begin{cases} x - y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Bài toán 4: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 2: Biện luận:

- Nếu hệ vô nghiệm, khi đó $(d) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (d) // (P)$.
- Nếu hệ có nghiệm duy nhất , khi đó $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ là nghiệm của hệ
- Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó $(d) \subset (P)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26. Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

$$(d): \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3y - 2z - 1 = 0 \end{cases}, (P): x + y - z - 12 = 0.$$

Bài tập 27. Chứng tỏ rằng (d) ⊂ (P), biết:

$$(P): 3x + 2y + z - 12 = 0, (d): \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{3}.$$

Bài tập 28. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình

$$(P): x + y + z = 0,\ (d): \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

A. A(1; 1; 2). **B.** A(1; 1; −2). **C.** A(−1; 1; 2). **D.** A(1; −1; −2).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài tập 29. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d), biết:

$$(P): m^2x + 2y + z + 1 - 3m = 0,\ (d): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 30. Biện luận theo tham số a, b vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d), biết:

$$(P): a^2x - ay + z + 2 = 0,\ (d): \begin{cases} x = t \\ y = b + t \\ z = b - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 31. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 2x + my + z - 5 = 0,\ (d): \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Tìm giá trị của m để:

a. (d) // (P).

A. m = 0. **B.** m = 1. **C.** m = 11. **D.** m = 18.

b. (d) ⊥ (P).

A. m = 0. **B.** m = 1. **C.** m = 4. **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 32. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \text{ và } (d): \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng $(d) \subset (P)$.

Bài tập 33. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 2x + 5y + z + 17 = 0, (d): \begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (P). Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

A. A(−2; 5; 4). **B.** A(2; −5; 4). **C.** A(2; 5; −4). **D.** A(−2; −5; 4).

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài toán 5: Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

$\Rightarrow$ có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$ và đi qua $M_1(x_1; y_1; z_1)$,

$$(d_2): \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

$\Rightarrow$ có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$ và đi qua $M_2(x_2; y_2; z_2)$,

để xét vị trí tương đối của (d_1) và (d_2) ta sử dụng các kết quả sau:

a. (d_1) và (d_2) đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2 \end{cases}$.
- (d_1) và (d_2) song song với nhau

  $\Leftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 \neq (x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2)$.
- (d_1) và (d_2) trùng nhau

  $\Leftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = (x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2)$.

b. (d_1) và (d_2) chéo nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

Như vậy, với yêu cầu "*Xét vị trí tương đối của 2 đường thẳng (d_1) và (d_2)*", thuật toán được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện:

- Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Kiểm tra:

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận (d_1) và (d_2) trùng nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, thực hiện bước 3.

Bước 3: Xác định $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) chéo nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 34. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. (d_1): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, (d_2): $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-7}{4}$.

b. (d_1): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{4}$, (d_2): $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 35. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. (d_1): $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$, (d_2): $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. (d_1): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và (d_2): $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$, $t, u \in \mathbb{R}$.

Bài tập 36. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau, biết:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = 1 + 2u, u \in \mathbb{R} \\ z = u + 1 \end{cases}.$$

Bài tập 37. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}, (d_2): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

A. (P): $x + y + z + 3 = 0$.
C. (P): $6x + y + z + 2 = 0$.
B. (P): $6x + 9y + z + 8 = 0$.
D. (P): $6x + 9y + 3z + 8 = 0$.

Bài tập 38. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

A. (P): $x + y - z + 2 = 0$.
C. (P): $x + 2y - 2z + 2 = 0$.
B. (P): $x + 2y - z + 2 = 0$.
D. (P): $3x + 2y - z + 2 = 0$.

Bài tập 39. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Lập phương trình đường phân giác của (d_1) và (d_2).

Bài tập 40. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình

$$(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}.$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

A. (P): $6x + 10y - 2z + 7 = 0$. **C.** (P): $3x + 9y - 2z + 6 = 0$.

B. (P): $x + 19y - 20z + 16 = 0$. **D.** (P): $63x + 109y - 20z + 76 = 0$.

c. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

A. 12. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 52.

Bài tập 41. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) song song với nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

A. (P): $x - y + 4 = 0$. **C.** (P): $x - z + 4 = 0$.

B. (P): $y - z + 4 = 0$. **D.** (P): $x + y - z + 4 = 0$.

c. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 42. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \quad (d_2): \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

A. (P): $x + y - z + 11 = 0$. **C.** (P): $x - 4y - 3z + 11 = 0$.

B. (P): $x + 4y - 3z + 1 = 0$. **D.** (P): $3x + 4y - 3z - 1 = 0$.

Bài tập 43. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{và } (d_2): \begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ z = -2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Lập phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài tập 44. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau.

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

A. (P): $x - y - 4z + 3 = 0$. **C.** (P): $x + 4y - 3z + 8 = 0$.

B. (P): $2x - 3y - 4z + 11 = 0$. **D.** (P): $2x - 4y - 4z + 9 = 0$.

c. Lập phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài tập 45. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6+4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} 4x+y-19=0 \\ x-z+15=0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Tìm toạ độ giao điểm I của (d_1) và (d_2).

A. I(3; 7; 18). **B.** I(3; 7; 1). **C.** I(2; 7; 18). **D.** I(3; 5; 18).

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

A. (P): $9x + 2y - z + 12 = 0$. **C.** (P): $11x + 3y - 11z + 13 = 0$.

B. (P): $x + 2y - 8z + 23 = 0$. **D.** (P): $19x + 2y - 11z + 123 = 0$.

Bài tập 46. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}, (d_2): \begin{cases} 4x-y-2=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) song song với nhau

b. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

c. Lập phương trình đường thẳng (d) trong (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

Bài tập 47. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình là:

$$(d_1): \begin{cases} x+8z+23=0 \\ y-4z+10=0 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases}.$$

a. Chứng tỏ rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

c. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1), mặt phẳng (Q) chứa (d_2) sao cho (P) song song với (Q).

d. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với Oz và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bài toán 6: Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

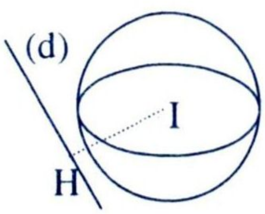
Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S), từ đó

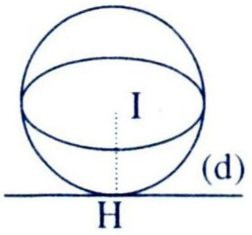
$$d = d(I, (d)).$$

Bước 2: So sánh d với R để đưa ra kết luận:

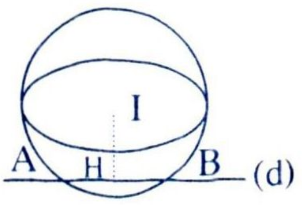
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

Bước 2: Thay x, y, z của (d) vào (S), ta được: $At^2 + Bt + C = 0 \quad (1)$

Bước 3: Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $t_0 \Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0), y(t_0), z(t_0),)$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ với $A(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ và $B(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$.

Chú ý: Với các bài toán không chứa tham số, khi sử dụng cách 1 chúng ta dễ dàng kết luận được về vị trí tương đối của (d) và (S), tuy nhiên:

- Trong trường hợp $(d) \cap (S) = \{A, B\}$ chúng ta không nhận được toạ độ của A và B.
- Với các bài toán có chứa tham số khi sử dụng cách 1 sẽ rất phức tạp.

Do vậy, tốt nhất hãy chọn cách 2.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 48. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt cầu (S), biết:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0.$$

Bài tập 49. Cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$$

và đường thẳng (d) đi qua điểm A(2, 1, 0) có vtcp $\vec{a}(1, m, -2)$. Biện luận theo m số giao điểm của mặt cầu (S) và đường thẳng (d).

Bài tập 50. Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 3z - 9 = 0 \end{cases},$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt cầu (S).

Bài tập 51. Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (S): x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$$

Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt cầu (S).

Bài tập 52. Cho điểm I(1, 2, –2), đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): 2x - 2 = y + 3 = z, (P): 2x + 2y + z + 5 = 0.$$

a. Mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu vi bằng 8π có phương trình:

b. Chứng minh rằng mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d).

c. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S).

A. $x - y + 3z - 10 = 0$. **C.** $6x - y + 30z - 5 = 0$.

B. $6x - 33y + 30z - 15 = 0$. **D.** $6x - 33y + 30z - 105 = 0$.

Bài tập 53. Cho tứ diện ABCD với A(1; –4; 3), B(1; 0; 5), C(0; 3; –2), D(6; –1; –2).

a. Lập phương trình đường vuông góc chung của AB và CD, từ đó tính khoảng cách giữa AB và CD.

b. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z - \dfrac{212}{49} = 0.$

B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - \dfrac{50}{49}z - \dfrac{25}{49} = 0.$

C. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{212}{49}x + \dfrac{25}{49}y - \dfrac{50}{49}z - \dfrac{116}{7} = 0.$

D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{212}{49}x + y - z - \dfrac{50}{49} = 0.$

Bài tập 54. Cho cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1},\ (P): 2x + y - 2z + 2 = 0.$$

a. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng (d), tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính bằng 1.

A. $(x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{9}{5})^2 + (z - \frac{1}{5})^2 = 1$ và $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 1.$

B. $(x - \frac{1}{5})^2 + (y + \frac{9}{5})^2 + (z - \frac{1}{5})^2 = 1$ và $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 1.$

C. $(x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{1}{5})^2 + (z - \frac{1}{5})^2 = 1$ và $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 1.$

D. $(x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{9}{5})^2 + (z - 2)^2 = 1$ và $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 1.$

b. Gọi M là giao điểm của (P) với (d), T là tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Tính độ dài đoạn MT

A. $\dfrac{\sqrt{74}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{74}{5}$.

Bài tập 55. Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},\ (P_1): 3x + 4y + 3 = 0,\ (P_2): 2x + 2y - z + 39 = 0.$$

A. $(x + 11)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$ và $(x + 191)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 12.$

B. $(x + 11)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 36$ và $(x + 191)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12996.$

C. $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = 9$ và $(x - 19)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 196$.

D. $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = 16$ và $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 96$.

Bài tập 56. Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

$$(d): \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases},$$

(P_1): $x + 2y - 2z - 2 = 0$ và (P_2): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

A. (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

B. (S): $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

C. (S): $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$.

D. (S): $(x + 11)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 25$.

Bài tập 57. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp hình chóp SABC, biết toạ độ

S(1; 2; 3), A(1; 2; 5), B(1; 4; 3), C(3; 2; 3).

A. (S): $(x - 2 + \sqrt{3})^2 + (y - 3 + \sqrt{3})^2 + (z - 3 + \sqrt{3})^2 = \frac{52}{3}$.

B. (S): $x^2 + (y - 3 + \sqrt{3})^2 + (z - 3 + \sqrt{3})^2 = 10\sqrt{3}$.

C. (S): $(x - 2 + \sqrt{3})^2 + (y - 3 + \sqrt{3})^2 + (z - 3 + \sqrt{3})^2 = \frac{52}{3} - 10\sqrt{3}$.

D. (S): $(x - 2 + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{3})^2 = \frac{52}{3} - 10\sqrt{3}$.

Bài tập 58. Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn lớn có bán kính bằng 4, biết:

$$(d): \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}, (P): y - z = 0.$$

A. (S): $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16$.

B. (S): $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$.

C. (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$.

D. (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16$.

Bài tập 59. Cho đường thẳng (d) và hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

(P): $x - 2y - z + 3 = 0$ và (Q): $2x + y - 2z - 1 = 0$.

Lập phương trình mặt cầu có tâm tại giao điểm I của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) sao cho mặt phẳng (Q) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn (C) có:

a. Diện tích 16π.

A. (S): $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$. **C.** (S): $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 17$.

B. (S): $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 11$. **D.** (S): $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$.

b. Chu vi bằng 2π.

A. (S): $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$. **C.** (S): $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$.

B. (S): $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 11$. **D.** (S): $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$.

Bài tập 60. Lập phương trình mặt cầu có tâm I(1; 2; −1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

A. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$.

B. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

C. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$.

D. (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$.

Bài tập 61. Cho hai đường thẳng (d) và (Δ), biết:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (\Delta): \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) tại điểm H(3; 1; 3) và có tâm thuộc (Δ) có dạng:

A. (S): $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$. **C.** (S): $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.

B. (S): $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 18$. **D.** (S): $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 18$.

Bài tập 62. Cho ba đường thẳng (d), (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d): \begin{cases} x = v \\ y = -2v \\ z = 6 + v \end{cases}, (d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 2u \\ y = u \\ z = 2 \end{cases}, t, u \in \mathbb{R}$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có dạng:

A. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z - \frac{13}{2})^2 = 1.$

B. $(S): (x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1.$

C. $(S): (x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + (z - \frac{13}{2})^2 = \frac{43}{2}.$

D. $(S): (x - \frac{1}{2})^2 + (y+6)^2 + (z - \frac{13}{2})^2 = \frac{43}{2}.$

Bài tập 63. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d_1): \frac{x}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1} \text{ và } (d_2): \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{0}$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm của chúng.

b. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d), có phương trình : $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

A. $(S): (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}.$

B. $(S): (x - \frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}.$

C. $(S): (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z+1)^2 = \frac{5}{2}.$

D. $(S): (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}.$

Bài tập 64. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

$$(d_2): \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = -3 - u \\ z = 1 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}, (d): \begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y - z + 3 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d), có phương trình :

A. (S): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{59}{6}$.

B. (S): $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$.

C. (S): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \dfrac{11}{6}$.

D. (S): $(x - 12)^2 + (y - 11)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{1}{6}$.

Bài tập 65. Lập phương trình mặt cầu tâm I(2; 3; −1) cắt đường thẳng (d) có phương trình: $(d): \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$

tại hai điểm A và B sao cho AB = 16.

A. (S): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

B. (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$.

C. (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 256$.

D. (S): $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 625$.

Bài tập 66. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \ (d_2): \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 12 = 0 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

c. Lập phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

A. (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

B. (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

C. (S): $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

D. (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$.

Bài tập 67. Lập phương trình mặt cầu (S) biết:

a. Tâm I(1, 2, 3) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 3x-4y-10=0.$$

A. (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

B. (S): $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=11$.

C. (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$.

D. (S): $(x-11)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

b. Tâm I thuộc (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

$$(d): \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases},\ (P_1): x+2y+2z+3=0,$$

(P_2): $x+2y+2z+7=0$.

A. (S): $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$.

B. (S): $x^2+(y+2)^2+(z+2)^2=1$.

C. (S): $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{1}{4}$.

D. (S): $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{9}{4}$.

Bài tập 68. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d), biết:

a. I(1, 2, −1) và (d): $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$.

A. (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=13$.

B. (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$.

C. (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.

D. (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=13$.

b. I(3, 2, 4) và (d): $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+3}{1}$.

A. (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=41$.

B. (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$.

C. (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$.

D. (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*:

Ta có: $a_1^2+a_2^2+a_3^2=m^2+(m-1)^2+m^2(m-1)^2>0, \forall m$

Vậy, với mọi m, thì (1) là phương trình của họ đường thẳng (d_m).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

Bài tập 2. Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $a_1^2+a_2^2+a_3^2=m^2+m^2(m+2)^2>0, \forall m\neq 0$.

Vậy, với mọi $m\neq 0$, (1) là phương trình của họ đường thẳng (d_m).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

Bài tập 3. Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để phương trình (1) là phương trình của đường thẳng điều kiện là:

$$1:2:(-m)\neq 2:(m+1):(-6)\Leftrightarrow (m^2+m-12;\ 6-2m;\ m-3)\neq\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m\neq 3.$$

Vậy, với mọi $m\neq 3$, (1) là phương trình của họ đường thẳng (d_m).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 - mz_0 + m = 0 \\ 2x_0 + (m+1)y_0 - 6z_0 + 6 = 0 \end{cases}, \forall m \neq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 - m(z_0 - 1) = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 6z_0 + 6 + my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \neq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 6z_0 + 6 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy, họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(0; 0; 1).

Bài tập 4.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), ta được:

$$\begin{cases} x_0 + mz_0 - m = 0 \\ (1-m)x_0 - my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} m(z_0 - 1) + x_0 = 0 \\ -m(x_0 + y_0) + x_0 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 - 1 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy, họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(0; 0; 1).

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1: Từ hệ (I), ta được:

$$mx + my + mz - m = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0. \qquad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha(x + mz - m) + \beta[(1 - m)x - my] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta - \beta m)x - \beta my + \alpha mz - \alpha m = 0. \qquad (2)$$

Lựa chọn các giá trị thích hợp của $\alpha = 1$, $\beta = -1$, đưa (2) về dạng:

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad (3)$$

Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$(P) \cap Ox = \{A(1, 0, 0)\}, (P) \cap Oy = \{B(0, 1, 0)\}, (P) \cap Oz = \{C(0, 0. 1)\}.$$

Thể tích khối tứ diện OABC được cho bởi:

$$V = \frac{1}{3}OA.S_{\Delta OBC} = \frac{1}{3}OA.\frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.1.1.1 = \frac{1}{6}\text{ (đvtt).}$$

Bài tập 5.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), ta được:

$$\begin{cases} x_0 + 4mz_0 - 3m = 0 \\ (1-m)x_0 - my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} m(4z_0 - 3) + x_0 = 0 \\ -m(x_0 + y_0) + x_0 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4z_0 - 3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 3/4 \end{cases}.$$

Vậy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(0; 0; \frac{3}{4})$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1: Từ hệ (I), ta được:

$$mx + my + 4mz - 3m = 0 \Leftrightarrow x + y + 4z - 3 = 0. \qquad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha(x + 4mz - 3m) + \beta[(1 - m)x - my] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta - \beta m)x - \beta my + 4\alpha mz - 3\alpha m = 0. \qquad (2)$$

Lựa chọn các giá trị thích hợp của $\alpha = 1$, $\beta = -1$, đưa (2) về dạng:

$$x + y + 4z - 3 = 0 \qquad (3)$$

Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$(P) \cap Ox = \{A(3, 0, 0)\}, (P) \cap Oy = \{B(0, 3, 0)\}, (P) \cap Oz = \{C(0; 0; \frac{3}{4})\}.$$

Thể tích khối tứ diện OABC được cho bởi:

$$V = \frac{1}{3}OA.S_{\Delta OBC} = \frac{1}{3}OA.\frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{6}OA.OB.OC$$

$$= \frac{1}{6}.3.3.\frac{3}{4} = \frac{9}{8} \text{ (đvtt).}$$

Bài tập 6. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d) ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(4;\ 14;\ 8).$$

Lấy điểm M(2; –1; 0) ∈ (d). Từ đó: (d): $\begin{cases} \text{qua } M(2;-1;0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2;7;4) \end{cases}$

- Phương trình tham số của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t,\ t \in \mathbf{R} \\ z = 4t \end{cases}$$

- Phương trình chính tắc của (d) có dạng: (d): $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

Cách 2: Lấy hai điểm M(2; –1; 0), N(0; –8; –4) thuộc đường thẳng (d).

Từ đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(2;-1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{NM}(2;7;4) \end{cases}$$

- Phương trình tham số của (d) có dạng: (d): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 4t \end{cases}$

- Phương trình chính tắc của (d) có dạng: (d): $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

Bài tập 7.

- Bằng cách khử t từ hệ, ta sẽ nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -5 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d).

- Bằng cách rút t từ hệ, ta sẽ nhận được phương trình chính tắc của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 2 \\ t = \dfrac{1-y}{2} \\ t = z + 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Bài tập 8. Các mặt phẳng (xOy), (xOz), (yOz) lần lượt có phương trình

(xOy): $z = 0$, (xOz): $y = 0$, (yOz): $x = 0$.

a. Giao tuyến của (P) với (xOy) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} 5x - 7y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Phương trình tham số của (d_1) có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{5t-3}{7} \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

b. Giao tuyến của (P) với (xOz) có phương trình:

$$(d_2): \begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} 5x + 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Phương trình tham số của (d_2) có dạng:

$$(d_2): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 \\ z = 5t - 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

c. Giao tuyến của (P) với (yOz) có phương trình:

$$(d_3): \begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_3): \begin{cases} -7y + 2z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Phương trình tham số của (d_3) có dạng: $(d_3): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t - 1 \\ z = 7t - 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

Bài tập 9. Ta có thể lựa chọn các cách sau:

Cách 1: Đặt x = 2t, ta có: $\begin{cases} 4t + y - z - 3 = 0 \\ 2t + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t + 2,\ t \in \mathbf{R} \\ z = t - 1 \end{cases}$$

suy ra phương trình chính tắc của nó có dạng: (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.

Cách 2: Chọn hai điểm A(0, 2, −1) ∈ (d) và B(2, −1, 0) ∈ (d). Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0,2,-1) \\ \text{qua } B(2,-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(0,2,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2,-3,1) \end{cases}$$

- Phương trình tham số của (d) có dạng: (d): $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$, t ∈ **R**.
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng: (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.

Bài tập 10. Ta có thể lựa chọn các cách sau:

Cách 1: Chọn điểm A(1; 0; −1) ∈ (d). Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}\,(1; -1; 4).$$

Khi đó: (d): $\begin{cases} \text{qua } A(1;0;-1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1;-1;4) \end{cases}$

- Phương trình tham số của (d) có dạng: (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$, t ∈ **R**.
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}.$$

Cách 2: Chọn hai điểm A(1; 0; −1) ∈ (d) và B(0; 1; −5) ∈ (d).

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1;0;-1) \\ \text{qua } B(0;1;-5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(1;0;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BA}(1;-1;4) \end{cases}.$$

- Phương trình tham số của (d) có dạng: $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng: $(d): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{4}.$

Bài tập 11. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Nhận xét rằng điểm M ∉ (d).

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), được:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}(-4; 8; 10) \text{ chọn } \vec{a}(-2; 4; 5).$$

Gọi (Δ) là đường thẳng qua điểm M và song song với đường thẳng (d), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

Bài tập 12. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; 3)$. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;2;3) \end{cases}$$

suy ra:

- Phương trình tham số của (d) có dạng: $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$
- Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Bài tập 13. Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của các đường thẳng (d), (d_1), (d_2), ta có:

$$\vec{a}_1 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}_1(1; -1; 4);$$

$$\vec{a}_2 = \left(\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(-13;\ 5;\ 11)$$

Khi đó: $\begin{cases}(d)\perp(d_1)\\ (d)\perp(d_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}\perp\vec{a}_1\\ \vec{a}\perp\vec{a}_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \left(\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 5 & 11\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 1\\ 11 & -13\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ -13 & 5\end{vmatrix}\right) = \vec{a}(-31;\ -63;\ -8).$$

Vậy, đường thẳng (d) thoả mãn: (d): $\begin{cases}\text{qua } A(2;0;-3)\\ \text{vtcp } \vec{a}(-31;-63;-8)\end{cases}$.

a. *Phương trình tham số* của đường thẳng (d) là: (d): $\begin{cases}x = 2 - 31t\\ y = -63t\\ z = -3 - 8t\end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

b. *Phương trình chính tắc* của đường thẳng (d) là:

$$(d):\ \frac{x-2}{-31} = \frac{y}{-63} = \frac{z+3}{-8}.$$

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là:

$$(d):\ \begin{cases}63x - 31y - 126 = 0\\ 8y - 63z - 189 = 0\end{cases}.$$

Bài tập 14. Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ) và vtpt của (P), ta có $\vec{a}(2;\ 1;\ 3)$ và $\vec{n}(1;\ -1;\ -1)$.

Theo giả thiết:

$$(\Delta):\ \begin{cases}(\Delta)//(P)\\ (\Delta)\perp(d)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{b}\perp\vec{n}\\ \vec{b}\perp\vec{a}\end{cases} \Rightarrow \vec{b}\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right) = \vec{b}(2;\ 5;\ -3).$$

Vậy, phương trình (Δ), được xác định bởi:

$$(\Delta):\ \begin{cases}\text{qua } A(1,1,-2)\\ \text{vtcp } \vec{b}(2,5,-3)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta):\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}.$$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của (Δ), ta có thể lựa chọn cách sau:

Phân tích: Theo giả thiết:

$$(\Delta):\begin{cases}A\in(\Delta)\\(\Delta)//(P)\\(\Delta)\perp(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\Delta)\subset(Q):\begin{cases}A\in(Q)\\(Q)//(P)\end{cases}\\(\Delta)\subset(R):\begin{cases}A\in(R)\\(R)\perp(d)\end{cases}\end{cases}\Rightarrow(P)\cap(Q)=(\Delta).$$

Gọi $\vec{a}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp, vtpt của (d), (P), ta có:

$$\vec{a}(2;1;3),\ \vec{n}(1;-1;-1).$$

- Phương trình mặt phẳng (Q), được xác định bởi:

$$(Q):\begin{cases}\text{qua } A(1;1;-2)\\\text{vtpt } \vec{n}(1;-1;-1)\end{cases}\Leftrightarrow(Q): x-1-(y-1)-(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(Q): x-y-z-2=0.$$

- Phương trình mặt phẳng (R), được xác định bởi:

$$(R):\begin{cases}\text{qua } A(1;1;-2)\\\text{vtpt } \vec{a}(2;1;3)\end{cases}\Leftrightarrow(R):2(x-1)+(y-1)+3(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(R): 2x+y+3z+3=0.$$

Phương trình đường thẳng (Δ) là giao tuyến của (Q) và (R), có dạng:

$$(\Delta):\begin{cases}x-y-z-2=0\\2x+y+3z+3=0\end{cases}.$$

Bài tập 15. Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của các đường thẳng (d), (d_1), (d_2), ta có $\vec{a}_1(8;1;1)$, $\vec{a}_2(0;-1;-1)$.

Khi đó, để thực hiện bài toán chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A(0;1;1)\\\text{vtpt } \vec{a}_1(8;1;1)\end{cases}\Leftrightarrow(P): 8x+y-1+z-1=0$$

$$\Leftrightarrow(P): 8x+y+z-2=0.$$

- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_2), ta có:

$$(Q):\begin{cases}\text{qua } A(0;1;1)\\\text{vtpt } \vec{a}_2(0;-1;-1)\end{cases}\Leftrightarrow(Q):\ -(y-1)-(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(Q): y+z-2=0.$$

Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chính là giao tuyến của (P) và (Q), vậy (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 8x + y + z - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(0; 8; -8) \text{ chọn } \vec{a}\,(0; 1; -1).$$

Khi đó, đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(0;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Nhận xét:

1. Như vậy để " *Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho trước* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách, cụ thể:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ của các đường thẳng (d_1), (d_2).

Bước 2: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

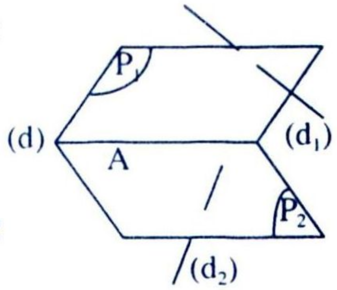
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn: $(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases}.$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P_1) \perp (d_1) \end{cases}.$$



Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P_2) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

Từ đó, nếu bài toán yêu cầu:

- Lập phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), sử dụng cách 1.
- Lập phương trình tổng quát của (d), sử dụng cách 2.

2. Hoàn toàn có thể phát biểu bài toán dưới dạng " *Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng* (d_1) ".

Bài tập 16.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), ta có $\vec{a}_1(0; -1; 1)$; $\vec{a}_2(4; 1; 1)$.

Cách 1: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \perp (Q) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P) cho bởi :

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_1(0; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 0(x-1) - 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): y - z = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q) cho bởi :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_2(4; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 4(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q): 4x + y + z - 6 = 0.$$

Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng :

$$(d): \begin{cases} y - z = 0 \\ 4x + y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Giả sử (d) với vtcp $\vec{a}$ là đường thẳng cần dựng, ta có:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = \vec{a}(-2; 4; 4)$$

chọn $\vec{a}(-1; 2; 2)$.

Khi đó, phương trình (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-1; 2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t, \ t \in \mathbf{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1 : Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 1;\ 0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \vec{a}_1(8;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 8x + y + z - 9 = 0$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2)

(P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(P_2): A(x + y - z + 2) + B(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_2): (A + B)x + Ay - Az + 2A + B = 0 \qquad (1)$$

Điểm $A(1, 1, 0) \in (P_2)$

$$\Leftrightarrow A + B + A + 2A + B = 0 \Leftrightarrow B = -2A.$$

Thay $B = -2A$ vào (1) được : (P_2): $-x + y - z = 0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) có dạng: (d):

$$\begin{cases} 8x + y + z - 9 = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 1;\ 0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \vec{a}_1(8;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 8x + y + z - 9 = 0.$$

- Gọi $\{B\} = (d_2) \cap (P)$, khi đó toạ độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 8x + y + z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 8 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow B(-1;\ 8;\ 9).$$

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 1;\ 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2;\ 7;\ 9) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 7t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 9t \end{cases}$$

Bài tập 17. Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), ta có $\vec{a}_1(2;\ 1;\ 3)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}(1;\ -1;\ -1)$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d), ta có :

$$(Q):\begin{cases}\text{qua } A(1;\ 1;\ -2)\\ \text{vtpt } \vec{a}_1(2;\ 1;\ 3)\end{cases}\Leftrightarrow (Q): 2(x-1)+y-1+3(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (Q): 2x+y+3z+3=0.$$

- Gọi (R) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P), ta có:

$$(R):\begin{cases}\text{qua } A(1;\ 1;-2)\\ \text{vtpt } \vec{n}(1;-1;-1)\end{cases}\Leftrightarrow (R): x-1-(y-1)-(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (R): x-y-z-2=0.$$

Đường thẳng (d) đi qua A, song song với (P) và vuông góc với (d_1) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R), vậy (d) có dạng: (d):

$$\begin{cases}2x+y+3z+3=0\\ x-y-z-2=0\end{cases}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) song song với (P) và vuông góc với (d_1)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_1\perp\vec{a}\\ \vec{n}\perp\vec{a}\end{cases}\Leftrightarrow \vec{a}\left(\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&2\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=\vec{a}(2;\ 5;\ -3).$$

Vậy đường thẳng (d_1) thoả mãn:

$$(d):\begin{cases}\text{qua } A(1;1;-2)\\ \text{vtcp } \vec{a}(2;5;-3)\end{cases}\Leftrightarrow (d_1): \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{-3.}.$$

Bài tập 18. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1):\begin{cases}\text{qua A}\\ (d_1)\perp(P_1)\end{cases}\text{ và } (P_2):\begin{cases}\text{qua A}\\ (d_2)\in(P_2)\end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1)

$$(P_1):\begin{cases}\text{qua A}\\ (d_1)\perp(P_1)\end{cases}\Leftrightarrow (P_1):\begin{cases}\text{qua } A(0,1,1)\\ \text{vtpt } \vec{n}=\vec{a}_1(-1,1,0)\end{cases}\Leftrightarrow (P_1): x-y+1=0$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2) được xác định bằng cách:

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát: :

  $$(d_2): \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

  (P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

  $$(P_2): A(y - z - 1) + B(x - 2z) = 0$$

  $$\Leftrightarrow (P_2): Bx + Ay - (2B + A)z - A = 0. \qquad (1)$$

  Điểm $A(0, 1, 1) \in (P_2) \Leftrightarrow A + 2B = 0 \Leftrightarrow B = -\dfrac{A}{2}$.

  Thay $B = -\dfrac{A}{2}$ vào (1), ta được (P_2): $x - 2y + 2 = 0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

  $$(P): \begin{cases} \text{qua } A(0,1,1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \vec{a_1}(-1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - y + 1 = 0.$$

- Gọi $B = (d_2) \cap (P)$, thay x, y, z từ phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P), ta được:

  $$2u - (1 + u) + 1 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow B(0, 1, 0).$$

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0; 1; 1) \\ \text{vtcp } \overline{AB}(0; 0; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Cách 3: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và cắt (d_2) tại B, khi đó:

$$B(2u, 1 + u, u) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2u; u; u - 1).$$

Gọi $\vec{a_1}$ là một vtcp của (d_1), ta có $\vec{a_1}(-1; 1; 0)$.

Vì $(d) \perp (d_1)$ nên :

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{a_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a_1} = 0 \Leftrightarrow -2u + u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(0; 0; -1).$$

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0;\ 1;\ 1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(0;\ 0;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét:

1. Như vậy để "*Lập phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2)*", ta có thể lựa chọn một trong ba cách, cụ thể:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn : (P_1): $\begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (P_1) \end{cases}$.

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn : (P_2): $\begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}$.

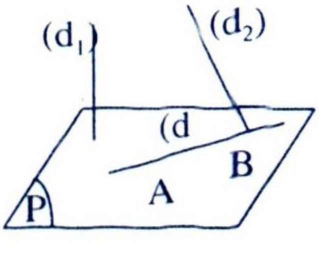
Bước 3: Kết luận:

- Nếu $(P_1) \equiv (P_2)$. Kết luận: bài toán có vô số nghiệm.
- Nếu $(P_1) \neq (P_2)$. Gọi (d) là giao tuyến của (P_1) và (P_2).
  - Nếu (d) // (d_2) thì bài toán vô nghiệm.
  - Còn lại, kết luận (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (P) \end{cases}.$$



Bước 2: Xác định giao điểm B của (d_2) và (P).

- Nếu không tồn tại giao điểm. Kết luận vô nghiệm.
- Nếu có vô số giao điểm ($(d_2) \in (P)$). Kết luận có vô số đường thẳng trong (P) đi qua A cắt (d_2).
- Nếu có nghiệm duy nhất thực hiện bước 3.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn : (d): $\begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 3: Được áp dụng khi (d_2) cho dưới dạng tham số

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử (d) cắt (d_2) tại B, khi đó toạ độ B thoả mãn phương trình tham số của (d_2), từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$.

Xác định toạ độ vectơ $\vec{a_1}$ là một vtcp của (d_1).

Bước 2: Vì $(d) \perp (d_1)$ nên: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{a_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a_1} = 0 \Rightarrow$ toạ độ điểm B.

Bước 3: Lập phương trình đường thẳng (d) thoả mãn : (d): $\begin{cases}\text{qua } A\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}\end{cases}$.

Từ đó:

- Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), sử dụng cách 2 hoặc cách 3.

2. Hoàn toàn có thể phát biểu bài toán dưới dạng " *Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A vuông góc với một vectơ (hoặc song song với một mặt phẳng) và cắt đường thẳng (d_1)* ".

Bài tập 19. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases}\text{qua } A\\ \vec{a} \perp (P_1)\end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases}\text{qua } A\\ (d_2) \in (P_2)\end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases}\text{qua } A(-1; 2; -3)\\ \text{vtpt } \vec{a}(6; -2; -3)\end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 6x - 2y - 3z + 1 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2)

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát: :

$$(d_2): \begin{cases}2x - 3y - 5 = 0\\ 5y + 2z - 1 = 0\end{cases}.$$

(P_2) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(P_2): A(2x - 3y - 5) + B(5y + 2z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_2): 2Ax - (3A - 5B)y + 2Bz - 5A - B = 0. \qquad (1)$$

Điểm $A(-1, 2, -3) \in (P_2)$ nên:

$$2A(-1) - 2(3A - 5B) + 2B(-3) - 5A - B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{13A}{3}.$$

Thay $B = \frac{13A}{3}$ vào (1), ta được: (P_2): $3x + 28y + 13z - 14 = 0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 6x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ 3x + 28y + 13z - 14 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng qua A vuông góc với vectơ $\vec{a}$, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(-1;\ 2;\ -3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(6;\ -2;\ -3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6x - 2y - 3z + 1 = 0.$$

Gọi B là là giao điểm của (d) và (P).

- Chuyển phương trình (d_2) về dạng tham số, ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

- Thay x, y, z vào phương trình của(P) , ta được:

$$6(3t + 1) - 2(2t - 1) - 3(-5t + 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow B(1;\ -1;\ 3).$$

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-1;2;-3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2;-3;6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Nhận xét rằng (d_2) không song song với (d).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 3: Chuyển phương trình (d_2) về dạng tham số, ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và cắt (d_2) tại B, khi đó:

$$B(1 + 3t;\ 2t - 1;\ 3 - 5t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2 + 3t;\ 2t - 3;\ 6 - 5t).$$

Vì (d) $\perp$ $\vec{a}$ nên :

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 6.(2 + 3t) + (-2)(2t - 3) + (-3)(6 - 5t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2;\ -3;\ 6).$$

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-1;\ 2;\ -3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2;\ -3;\ 6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Bài tập 20. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \subset (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \subset (Q) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

  (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

  $$(P): A(x + y + z - 3) + B(y + z - 1) = 0$$

  $$\Leftrightarrow (P): Ax + (A + B)y + (A + B)z - B - 3A = 0. \qquad (1)$$

  Điểm A(1, 1, 1) ∈ (P) nên:

  $$A + A + B + A + B - B - 3A = 0 \Leftrightarrow B = 0.$$

  Thay B = 0 vào (1) được (P): $x + y + z - 3 = 0$.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

  (Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

  $$(Q): C(x - 2y - 2z + 9) + D(y - z + 1) = 0$$

  $$\Leftrightarrow (Q): Cx + (D - 2C)y - (D + 2C)z + 9C + D = 0. \quad (2)$$

  Điểm A(1, 1, 1) ∈ (Q) nên:

  $$C + D - 2C - (D + 2C) + 9C + D = 0 \Leftrightarrow D = -6C.$$

  Thay D = –6C vào (2) được (Q): $x - 8y + 4z + 3 = 0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 8y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Kiểm tra: Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(12; -3; -9) \text{ chọn } \vec{a}\,(-4; 1; 3).$$

$$\vec{a}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}_1(0; -1; 1).$$

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}_2(4; 1; 1).$$

$\Rightarrow$ (d) không song song với (d_1) và (d_2).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có

$$(P): x + y + z - 3 = 0.$$

Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2). Khi đó toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3/2 \\ z = 5/2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}).$$

Gọi (d) là đường thẳng qua A, B, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtcp } \overline{AB}(-2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtcp } (-4; 1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi $\vec{a}_1$ là vtcp của (d_1), ta có $\vec{a}_1(0; -1; 1)$.

Từ đó, dễ thấy $\vec{a}_1$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Nhận xét: Như vậy để "*Lập phương trình đường thẳng đi qua A cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2)*", ta có thể lựa chọn một trong hai cách, cụ thể:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn :

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Kết luận:

- Nếu (P_1) song song hoặc trùng với (P_2). Kết luận bài toán có vô số nghiệm.
- Còn lại, gọi (d) là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

- Nếu: $\left[\begin{array}{l}(d)//(d_1)\\(d)//(d_2)\end{array}\right.$.

  Kết luận: bài toán vô nghiệm.

- Còn lại, kết luận (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn :

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A\\(d_1)\in(P)\end{cases}.$$

Bước 2: Xác định giao điểm C của (d_2) và (P).

- Nếu không tồn tại giao điểm. Kết luận bài toán vô nghiệm.
- Nếu có vô số giao điểm $((d_2)\in(P))$. Kết luận bài toán có vô số nghiệm đó chính là chùm đường thẳng trong (P) đi qua A.
- Nếu có nghiệm duy nhất thực hiện bước 3.

Bước 3: Lập phương trình đường thẳng (d) thoả mãn :

$$(d): \begin{cases}\text{qua } A\\\text{vtcp } \overrightarrow{AB}\end{cases}.$$

Cần kiểm chứng (d) không song song với (d_1) .

Từ đó:

- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tổng quát của đường thẳng (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), ta sử dụng cách 2.

Ngoài ra trong trường hợp hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cho dưới dạng tham số chúng ta còn có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B, C. Khi đó toạ độ B, C theo thứ tự thoả mãn các phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thẳng hàng ta xác định được toạ độ B, C.

Bước 3: Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và B.

Bài tập 21. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm B, C. Khi đó:

Điểm $B \in (d_1) \Rightarrow B(1 + t; -t; 0)$

Điểm $C \in (d_2) \Rightarrow C(0; 0; 2 + u)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng điều kiện là:

$$\frac{t}{-1} = \frac{-t-1}{-1} = \frac{0}{2+u} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ u = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0) \\ C(0; 0; 0) \end{cases}.$$

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 0) \\ \text{qua } C(0; 0; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } C(0; 0; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CA}(1; 1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Nhận xét: Phương pháp được mở rộng khi thay điều kiện đi qua điểm A bằng một điều kiện khác.

Bài tập 22. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{b}$ là vtcp của đường thẳng (Δ), ta được $\vec{b}(1; 1; 3)$.

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ (P) // (\Delta) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} (d_2) \subset (Q) \\ (Q) // (\Delta) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát:

  $$(d_1): \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

  (P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

  $$(P): A(3x - 2y + 1) + B(2x - z + 1) = 0$$

  $$\Leftrightarrow (P): (3A + 2B)x - 2Ay - Bz + A + B = 0. \quad (1)$$

  Khi đó (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3A + 2B, -2A, -B)$.

  Để (P) // (Δ) điều kiện là:

  $$\overrightarrow{n_P} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} . \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3A + 2B - 2A - 3B = 0 \Leftrightarrow B = A.$$

  Thay B = A vào (1) được: (P): $5x - 2y - z + 2 = 0$.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát: $(d_2): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

(Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(Q): C(x + y - 1) + D(2x - z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q): (C + 2D)x + Cy + 2Dz - C = 0. \qquad (2)$$

Khi đó (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(C + 2D, C, 2D)$.

Để (Q) // (Δ) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow C + 2D + C + 6D = 0 \Leftrightarrow C = -4D.$$

Thay $C = -4D$ vào (2) được: $(Q): 2x + 4y + z - 4 = 0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 5x - 2y - z + 2 = 0 \\ 2x + 4y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Kiểm tra: Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2) ta có:

$\vec{a}(1; 1; 3)$, $\vec{a}_1(2; 3; 4)$, $\vec{a}_2(1; -1; 2) \Rightarrow \vec{a}$ không cùng phương với $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ (P) // (\Delta) \end{cases} \overset{\text{cách 1}}{\Leftrightarrow} (P): 5x - 2y - z + 2 = 0.$$

Gọi M là giao điểm của (P) với (d_2), toạ độ của M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; 0).$$

Gọi (d) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M \\ (d) // (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } M(0,1,0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

Nhận xét rằng (d) cắt (d_1) (vì chúng đồng phẳng và không cùng phương) và (d) cắt (d_2) tại M, do đó (d) là đường thẳng cần dựng.

Cách 3: Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại A và B

Chuyển phương trình (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2, t \in \mathbf{R} \\ z = 4t + 3 \end{cases} \Rightarrow A(2t + 1; 3t + 2; 4t + 3),$$

$$(d_2): \begin{cases} x = u \\ y = 1 - u, \ u \in \mathbf{R} \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow B(u;\ 1-u;\ 2u),$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\,(2t - u + 1;\ 3t + u + 1;\ 4t - 2u + 3).$$

Vì (d) // (Δ) nên

$$\overrightarrow{BA} \ // \ \vec{b}\,(1;\ 1;\ 3) \Leftrightarrow \frac{2t-u+1}{1} = \frac{3t+u+1}{1} = \frac{4t-2u+3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;2;3) \\ B(0;1;0) \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(1;2;3) \\ \text{qua } B(0;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } B(0;\ 1;\ 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BA}(1;\ 1;\ 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

Nhận xét:

1. Thông qua ba cách giải trên chúng ta có nhận xét sau:

   Cách 1: Ngoài việc phải thực hiện khối lượng công việc khá lớn chúng ta còn phải kiểm tra lại điều kiện cắt của đường thẳng (d).

   Cách 2: Công việc có được giảm đôi chút xong vẫn phải kiểm tra lại điều kiện cắt của đường thẳng (d) với (d_1).

   Cách 3: Luôn đảm bảo tính đúng đắn cùng với lời giải tương đối ngắn.

   Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp người ta vẫn lựa chọn cách 1 bởi toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) với hai đường thẳng (d_1), (d_2) bị lẻ.

2. Phương pháp được mở rộng khi thay điều kiện đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) bằng đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.

Bài tập 23.

a. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) suy ra (P) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d) có dạng:

$$A(2x - 3y - 5) + B(5x + 2z - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (2A + 5B)x - 3Ay + 2Bz - 5A - 14B = 0 \qquad (1)$$

Điểm $M(-1;\ 2;\ 3) \in (P)$

$$\Leftrightarrow (2A + 5B)(-1) - 3A.2 + 2B.3 - 5A - 14B = 0 \Leftrightarrow B = -A.$$

Thay B = −A vào (1), ta được:

$$(P): 3x + 3y + 2z - 9 = 0.$$

b. Ta có :

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua M vuông góc với vectơ $\vec{a}$, ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } M(-1;2;3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(6;-2;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x - 2y - 3z + 19 = 0.$$

- Khi đó $(\Delta) = (P) \cap (Q)$, có phương trình được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} 3x + 3y + 2z - 9 = 0 \\ 6x - 2y - 3z + 19 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 24. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1. Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \in (P) \end{cases} \text{ và } (Q): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \in (Q) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

  Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát: $(d): \begin{cases} 2x + 3y + 11 = 0 \\ x + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

  (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_1) và đi qua điểm A, có dạng:

  $$(P): x + 3z - 5 = 0.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

  Chuyển phương trình (d_2) về dạng tổng quát: $(d): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$.

  (Q) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2) và đi qua điểm A, có dạng:

  $$(Q): 7x - 13y - 5z - 22 = 0.$$

- Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ 7x - 13y - 5z - 22 = 0 \end{cases}.$$

Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2), ta có:

$$\vec{a}\,(3; 2; -1),\ \vec{a}_1(3; -2; -1),\ \vec{a}_2(2;3; -5).$$

Nhận xét rằng: (d) không song song với (d_1) và (d_2).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

$$(P): x + 3z - 5 = 0.$$

- Gọi B là giao điểm của (P) và (d_2), khi đó toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2; -1; 1).$$

- Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-4;-5;3) \\ \text{qua } B(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Dễ thấy (d) không song song với (d_1).

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 3: Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại C và D

Chuyển phương trình (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t - 3 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \Rightarrow C(3t - 1; -2t - 3; 2 - t).$$

$$(d_2): \begin{cases} x = 2u + 2 \\ y = 3u - 1 \\ z = 1 - 5u \end{cases}, u \in \mathbf{R} \Rightarrow D(2u + 2; 3u - 1; 1 - 5u).$$

Vì $A \in (d) \Leftrightarrow$ A, C, D thẳng hàng, do đó:

$$\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \frac{3t+3}{2u+6} = \frac{2-2t}{3u+4} = \frac{-t-1}{-5u-2}$$

$$\Leftrightarrow u = t = 0 \Rightarrow \begin{cases} C(-1;-3;2) \\ D(2;-1;1) \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{qua } D \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{qua } C(-1, -3, 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CD}(3, 2, -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Bài tập 25. Gọi $\vec{b}$ là vtcp của đường thẳng (Δ), ta được $\vec{b}(3; -1; 1)$.

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó:

$$(P):\begin{cases}(d_1)\subset(P)\\(P)//(\Delta)\end{cases}\text{ và }(Q):\begin{cases}(d_2)\subset(Q)\\(Q)//(\Delta)\end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P)

Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát: $(d_1): \begin{cases}4x-y-6=0\\3x-z-1=0\end{cases}.$

(P) thuộc chùm tạo bởi (d_1), có dạng:

$$(P): A(4x-y-6)+B(3x-z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (P): (4A+3B)x-Ay-Bz-6A-B=0. \qquad (1)$$

Khi đó (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(4A+3B,\ -A,\ -B)$.

Để (P) // (Δ) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_P}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}.\vec{b}=0\Leftrightarrow 3(4A+3B)+A-B=0\Leftrightarrow B=-\frac{13A}{8}.$$

Thay $B=-\frac{13A}{8}$ vào (1) được (P): $7x+8y-13z+35=0$.

- Xác định phương trình mặt phẳng (Q)

(Q) thuộc chùm tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(Q): C(x-y+4z-3)+D(2x-y-z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (Q): (C+2D)x-(C+D)y+(4C-D)z-3C+D=0. \qquad (2)$$

Khi đó (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(C+2D;\ -C-D;\ 4C-D)$.

Để (Q) // (Δ) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_Q}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_Q}.\vec{b}=0\Leftrightarrow 3(C+2D)+C+D+4C-D=0\Leftrightarrow D=-\frac{4C}{3}.$$

Thay $D=-\frac{4C}{3}$ vào (2) được (Q): $5x-y-16z+13=0$.

Phương trình giao tuyến (d) của (P) và (Q) có dạng:

$$(d): \begin{cases}7x+8y-13z+35=0\\5x-y-16z+13=0\end{cases}$$

Kiểm tra: Gọi $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d), (d_1), (d_2) ta có:

$\vec{a}(115; -57; 47)$, $\vec{a}_1(2; 4; 3)$, $\vec{a}_2(5; 9; 1)$

$\Rightarrow \vec{a}$ không cùng phương với $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Vậy, (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài tập 26. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P): $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3y - 2z - 1 = 0 \\ x + y - z - 12 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy, ta thấy $(d) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (d) \parallel (P)$.

Chú ý: Với yêu cầu " *Chứng minh rằng đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P)* ", ta có thể trình bày như sau:

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được

$\vec{a}(1; 2; 3) \Rightarrow \vec{a} \parallel (P)$ vì (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; -1)$. (1)

Lấy $A(1; 1; 1) \in (d)$, ta có nhận xét $A \notin (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(d) \parallel (P)$.

Bài tập 27. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z}{3} \\ 3x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ z = 3x \\ 3x + 2(6 - 3x) + 3x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ z = 3x \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Hệ (I) có vô số nghiệm, do đó $(d) \subset (P)$.

Cách 2: Lấy hai điểm phân biệt $A(0; 6; 0)$, $B(1; 3; 3) \in (d)$.

Nhận xét rằng $A, B \in (P)$ nên $(d) \subset (P)$.

Cách 3: Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(1; -3; 3) \Rightarrow \vec{a} \parallel (P)$. (1)

Lấy $A(0; 6; 0) \in (d)$, ta có nhận xét $A \in (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(d) \subset (P)$.

Bài tập 28.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1; -2).$$

Vậy $(d) \cap (P) = \{A(1; 1; -2)\}$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được $\vec{a}(2; -1; 3)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; -2) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2; -1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 3z + 5 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy, để " *Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P)* ", khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (Q) thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{a} \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

Bài tập 29. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số: $(d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$m^2t + 2(1 - t) + 3 - 2t + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m^2t - 4t + 6 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow (m^2 - 4)t = 3m - 6.$ (1)

a. Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Với m = 2,

  $(1) \Leftrightarrow 0x = 0.$

  Vậy, phương trình nghiệm đúng với $\forall t \in R \Leftrightarrow (d) \subset (P)$.

- Với m = −2,

  $(1) \Leftrightarrow 0.t = -12.$

  Vậy, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) // (P)$.

b. Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$, khi đó :

$(1) \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{m+2}$, là nghiệm duy nhất.

Vậy, $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ $A\left(\dfrac{3}{m+2}; \dfrac{m-1}{m+2}; \dfrac{3m}{m+2}\right)$.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 2$, thì $(d) \cap (P) = \{A\}$, với $A(\frac{3}{m+2}; \frac{m-1}{m+2}; \frac{3m}{m+2})$.
- Với $m = 2$, thì $(d) \subset (P)$.
- Với $m = -2$, thì $(d) // (P)$.

Bài tập 30. Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$$a(a-1)t = b(a-1). \qquad (1)$$

a. Nếu $a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

- Với $a = 0$

  $(1) \Leftrightarrow 0.t = -b$.

  - Với $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (d) \subset (P)$.
  - Với $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) // (P)$.

- Với $a = 1$

  $(1) \Leftrightarrow 0.t = 0$, luôn đúng với $\forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (d) \subset (P)$.

b. Nếu $a^2 - a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow t = \frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Vậy, $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ $A(\frac{b}{a}; \frac{ab+b}{a}; b-2)$.

Kết luận:

- Với $a = b = 0$ hoặc $a = 1$, thì $(d) \subset (P)$.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, thì $(d) // (P)$.
- Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, thì $(d) \cap (P) = \{A(\frac{b}{a}; \frac{ab+b}{a}; b-2)\}$.

Bài tập 31. Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-1; 1; 1)$ và điểm $M_0(0; -\frac{3}{2}; \frac{11}{4}) \in (d)$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; m; 1)$.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để (d) // (P) điều kiện là:

$$\begin{cases}\vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 + m + 1 = 0 \\ -\dfrac{3m}{2} + \dfrac{11}{4} - 5 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thì (d) // (P).

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Để (d) ⊥ (P) điều kiện là:

$$\vec{u} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{2}{-1} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để (d) ⊥ (P).

Nhận xét: Như vậy, với bài toán đòi hỏi vị trí tương đối cụ thể của đường thẳng và mặt phẳng chúng ta có thể sử dụng tới vtcp của đường thẳng và vtpt của mặt phẳng, cụ thể:

Với đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(d): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$

(P): Ax + By + Cz + D = 0, có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.

Khi đó:

1. (d) ∩ (P) = {M} điều kiện là:

$$\vec{u}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0.$$

2. (d) // (P) điều kiện là:

$$\begin{cases}\vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0\end{cases}.$$

3. (d) ⊂ (P) điều kiện là:

$$\begin{cases}\vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \in (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\end{cases}.$$

4. (d) ⊥ (P) điều kiện là: a : b : c = A : B : C.

Bài tập 32. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P):

$$\begin{cases}5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \\ 18x - 10y - 14 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Hệ (I) có vô số nghiệm, do đó (d) ⊂ (P).

Cách 2: Lấy hai điểm phân biệt $A(\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9})$, $B(0; -\frac{7}{5}; \frac{2}{5}) \in (d)$

Nhận xét rằng $A, B \in (P) \Rightarrow (d) \subset (P)$.

Cách 3: Ta lần lượt thực hiện:

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được $\vec{a}(4; -3; 7)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được $\vec{n}(4; -3; 7)$.

Lấy điểm $A(\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}) \in (d)$.

Nhận xét rằng: $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow (d) \subset (P)$.

Bài tập 33.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \\ 2x + 5y + z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2; -5; 4).$$

Vậy $(d) \cap (P) = \{A(2; -5; 4)\}$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được: $\vec{a}(-11; 27; 15)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(2; -5; 4) \\ \text{vtpt } \vec{a}(-11; 27; 15) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (Q): -11x + 27y + 15z + 97 = 0$.

Khi đó, đường thẳng (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + 5y + z + 17 = 0 \\ -11x + 27y + 15z + 97 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 34.

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 3; 4)$ và điểm $M_1(1; 2; 3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 3; 4)$ và điểm $M_2(2; 5; 7) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}(1; 3; 4)$ cùng phương.

Vậy, (d_1) và (d_2) trùng nhau.

b. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; -1; 4)$ và điểm $M_1(1; 1; 2) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; -1; 4)$ và điểm $M_2(1; 0; -1) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}(0; -1; -3)$.

Vậy, (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Bài tập 35.

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(-2; 1; 3)$ và điểm $M_1(1; -2; 4) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; -1; 3)$ và điểm $M_2(-1; 0; -2) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, khi đó:

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (6; 9; 1).(-2; 2; -6) = 0 \Leftrightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau.}$$

b. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 3)$ và điểm $M_1(1; 2; -3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 2; 3)$ và điểm $M_2(2; -3; 1) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, khi đó:

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; -3; 3).(1; -5; 4) = 24 \Leftrightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

Bài tập 36. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có:

- Với đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 3)$ và đi qua $M_1(1; 2; -1)$.
- Với đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 2; 1)$ và đi qua $M_2(2; 1; 1)$.

suy ra:

- $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương.
- $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (-5; 1; 3).(1; -1; 2) = -5 - 1 + 6 = 0.$

Vậy, (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} 2t + 1 = u + 2 \\ t + 2 = 1 + 2u \\ 3t - 1 = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 1 \overset{(d_1)}{\Rightarrow} I(3; 3; 2).$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(3; 3; 2)\}$.

Chú ý:

1. Như vậy với yêu cầu cụ thể của bài toán là "*Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau*", tốt nhất các em học sinh hãy sử dụng cách 2 để thực hiện.
2. Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau các yêu cầu thường được nảy sinh là:
   - Lập phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).
   - Lập phương trình đường phân giác của (d_1) và (d_2).

Bài tập 37.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), bằng việc thay x, y, z ở phương trình của (d_2) vào (d_1), ta được:

$$\frac{-1 + t - 1}{-2} = \frac{-t + 2}{1} = \frac{-2 + 3t - 4}{3} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I(1; -2; 4).$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(1; -2; 4)\}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(-2; 1; 3)$, $\vec{a}_2(1; -1; 3)$.

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{a_1} \,\&\, \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(1; -2; 4) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (6; 9; 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): 6(x - 1) + 9(y + 2) + 1(z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (P): 6x + 9y + z + 8 = 0.$

Nhận xét:

1. Như vậy để lập phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau (d_1) và (d_2) chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{a_1} \ \& \ \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] \end{cases}.$$

Phương pháp này tương đương với việc:

Bước 1: Lấy hai điểm $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$ với $A, B \neq I$.

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{IA} \ \& \ \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}] \end{cases}.$$

ngoài ra khi đó còn có thể thực hiện theo cách:

Bước 1: Lấy hai điểm $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$ với $A, B \neq I$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì ba điểm $I, A, B \in (P) \Rightarrow$ phương trình của (P).

2. Ngoài ra có thể sử dụng chùm mặt phẳng để thực hiện, cụ thể:

Lấy điểm $A(-1; 0; -2) \in (d_2)$, thấy ngay $A \neq I$.

Chuyển phương trình (d_1) về dạng tổng quát, ta được:

$$(d_1): \begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} \\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{z-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + 2z - 11 = 0 \end{cases}.$$

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- Vì $(d_1) \subset (P)$ nên (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_1), có dạng:

$(P): A(x + 2y + 3) + B(3x + 2z - 11) = 0$

$\Leftrightarrow (P): (A + 3B)x + 2Ay + 2Bz + 3A - 11B = 0.$ (1)

- Vì A(−1, 0, −2) ∈ (P) nên:

$$(A + 3B)(-1) + 2A.0 + 2B(-2) + 3A - 11B = 0 \Leftrightarrow A = 9B.$$

Thay A = 9B vào (1) được (P): $6x + 9y + z + 8 = 0$.

Như vậy, để lập phương trình mặt phẳng (P) bằng chùm mặt phẳng, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $A \in (d_2)$ và $A \notin (d_2)$.

Bước 2: Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_1) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- Vì $(d_1) \subset (P)$ nên (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d).
- Vì $A \in (P) \Rightarrow$ tham số.
- Nhận được phương trình mặt phẳng (P).

Bài tập 38.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}).$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2})\}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(-1; 2; 3)$, $\vec{a}_2(1; 2; 5)$.

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{a_1} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (1; 2; -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $x + 2y - z + 2 = 0$.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Lấy $A(0; -1; 0) \in (d_1)$ và $B(0; 1; 4) \in (d_2)$, có $A.B \neq I$.

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{IA} \text{ và } \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}] = (1; 2; -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): x + 2y - z + 2 = 0.$

✍ *Lời giải tự luận 3*: Lấy $A(0; -1; 0) \in (d_1)$ và $B(0; 1; 4) \in (d_2)$, có $A, B \neq I$.

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì ba điểm $I, A, B \in (P)$, ta được:

$$\begin{cases} -A + C + 2D = 0 \\ -B + D = 0 \\ B + 4C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D = 2A,\ B = 2A,\ C = -A.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$(P): x + 2y - z + 2 = 0.$

✍ *Lời giải tự luận 4*: Lấy $A(0; -1; 0) \in (d_1)$ $(A \neq I)$.

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- Vì $(d_2) \subset (P)$ nên (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2), có dạng:

  $(P): A(2x + y + 1) + B(x - y + z - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow (P): (2A + B)x + (A - B)y + Bz + A - B = 0 \qquad (1)$

- Điểm $A \in (P)$ nên:

  $(2A + B).0 + (A - B).1 + B.4 + A - B = 0 \Leftrightarrow B = -A.$

Thay $B = -A$ vào (1) được $\Leftrightarrow (P): x + 2y - z + 2 = 0.$

Bài tập 39.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} 0 = 2u - 2 \\ 1 = 1 \\ 1 - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 1 \overset{(d_1)}{\Rightarrow} I(0, 1, 0).$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(0; 1; 0)\}$.

b. Ta có hai cách thực hiện sau:

Cách 1: Lấy $A(0; 1; 2) \in (d_1)$, với $A \neq I$.

Gọi $B(2u - 2; 1; 0) \in (d_2)$ thoả mãn:

$$AI = BI \Leftrightarrow AI^2 = BI^2 \Leftrightarrow 4 = (2u - 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1(-2; 1; 0) \\ B_2(2; 1; 0) \end{array}\right..$$

- Với $B_1(-2, 1, 0) \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_1 của AB_1 là $I_1(-1, 1, 1)$.

  Khi đó, phương trình đường phân giác thứ nhất được xác định bởi:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{qua } I(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1}(-1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $B_2(2; 1; 0) \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_2 của AB_2 là $I_2(1; 1; 1)$.

  Khi đó phương trình đường phân giác thứ hai được xác định bởi:

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{qua } I(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1}(1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_2): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Cách 2: Lấy $A(0; 1; 2) \in (d_1)$ và $B(4; 1; 0) \in (d_2)$, với $A, B \neq I \Rightarrow IA = 2$ và $IB = 4$.

Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ I xuống AB, ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK_1} = 2\overrightarrow{AK_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4 = 2x_1 \\ y_1 - 1 = 2y_1 - 2 \\ z_1 = 2z_1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow K_1(-4; 1; 4).$$

  Khi đó, phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi:

$$(IK_1): \begin{cases} \text{qua } I(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_1}(-4;0;4) \end{cases} \Leftrightarrow (IK_1): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- Điểm $K_2(x_2, y_2, z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\frac{IA}{IB}$, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{AK_2}}{\overrightarrow{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK_2} = -2\overrightarrow{AK_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 4 = -2x_2 \\ y_2 - 1 = -2y_2 + 2 \\ z_2 = -2z_2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} \\ y_2 = 1 \\ z_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow K_2(\frac{4}{3}; 1; \frac{4}{3})$$

Khi đó, phương trình đường phân giác trong được xác định bởi:

$$(IK_2): \begin{cases} \text{qua } I(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_2}(1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (IK_2): \begin{cases} x = t \\ y = 1, t \in \mathbf{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Nhận xét: Như vậy, để lập phương trình đường phân giác của hai đường thẳng cắt nhau (d_1) và (d_2), chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2). Lấy $A \in (d_1)$, với $A \neq I$.

Bước 2: Gọi $B \in (d_2)$ thoả mãn $AI = BI \Rightarrow$ toạ độ hai điểm B_1, B_2.

Bước 3: Ta có:

- Với $B_1 \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_1 của AB_1.

  Khi đó phương trình đường phân giác thứ nhất là:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_1} \end{cases}.$$

- Với $B_2 \Rightarrow$ toạ độ trung điểm I_2 của AB_2.

  Khi đó phương trình đường phân giác thứ hai là:

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{II_2} \end{cases}.$$

Lưu ý: Với cách giải này, ta có các lưu ý sau:

1. Để giảm độ phức tạp cho bài toán, tốt nhất nên chọn (d_2) cho dưới dạng phương trình tham số.

2. Ta có kết quả:

   a. Nếu $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi (d_1), (d_2).

   b. Nếu $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi (d_1), (d_2).

3. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (P) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2).

Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$, với $A, B \neq I$.

Bước 2: Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ I xuống AB, ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{toạ độ } K_1.$$

Khi đó phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi:

$$(IK_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_1} \end{cases}.$$

- Điểm $K_2(x_2; y_2; z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\dfrac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AK_2}}{\overrightarrow{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{toạ độ } K_2.$$

Khi đó phương trình đường phân giác trong được xác định bởi:

$$(IK_2): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_2} \end{cases}.$$

Lưu ý: Với cách giải này, nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (P) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{chứa IK} \\ (P) \perp (IAB) \end{cases}$$

Bài tập 40.

a. Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\vec{a}_1(3; -1; 4)$ và $A(-7; 5; 9) \in (d_1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\vec{a}_2(3; -1; 4)$ và $B(0; -4; -18) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ cùng phương và không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}(7; -9; -27)$.

Vậy, (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \vec{a}_1 \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(-7;5;9) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{AB}] = (63; 109; -20) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 63(x + 7) + 109(y - 5) - 20(z - 9) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (P): 63x + 109y - 20z + 76 = 0.$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau, nên khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách từ điểm A đến (d_2), được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = d(A, (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{a_2}]|}{|\overrightarrow{a_2}|} = 25.$$

Nhận xét: Như vậy, thông qua lời giải trên chúng ta đã biết cách:

- Lập phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song (d_1) và (d_2).
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song.

Với yêu cầu " *Lập phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song (d_1) và (d_2)* ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A, B $\in (d_1)$ và C $\in (d_2)$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ điều kiện } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Bước 3: Vì ba điểm A, B, C $\in$ (P) $\Rightarrow$ phương trình của (P).

Cách 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A $\in (d_1)$.

Bước 2: Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- Vì $(d_2) \subset (P)$ nên (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2)
- Điểm A $\in$ (P) $\Rightarrow$ phương trình của (P).

Bài tập 41.

a. Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\vec{a}_1(2; -1; -1)$ và $A(3; 1; 5) \in (d_1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\vec{a}_2(2; -1; 1)$ và $B(3; -3; 1) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ cùng phương và không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}(0; -4; -4)$.

Vậy, (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \vec{a}_1 \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(3; 1; 5) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{AB}] = (0; 1; -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $y - z + 4 = 0$.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Lấy $C(1; 2; 6) \in (d_1)$

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì ba điểm A, B, C$\in$(P), ta được:

$$\begin{cases} 3A + B + 5C + D = 0 \\ 3A - 3B + C + D = 0 \\ A + 2B + 6C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0, D = 4B, C = -B.$$

Vậy, phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$(P): y - z + 4 = 0.$

✍ *Lời giải tự luận 3*: Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(P): A(y - z + 4) + B(x + 2y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): Bx + (A + 2B)y - Az + 3B + 4A = 0. \qquad (1)$$

- Điểm $A \in (P)$ nên:

$$3B + (A + 2B) - 5A + 3B + 4A = 0 \Leftrightarrow B = 0.$$

Thay $B = 0$ vào (1), được $(P): y - z + 4 = 0.$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau, nên khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách từ điểm A đến (d_2), được xác định bởi công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = d(A, (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{a_2}]|}{|\overrightarrow{a_2}|} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập 42.

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{a_1}\,(1; 2; 3)$ và điểm $M_1(1; 2; 3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{a_2}\,(-1; 1; 1)$ và điểm $M_2(1; 0; 1) \in (d_2)$.

Khi đó:

$$[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; -4; 3).(0; -2; -2) = 2$$

$\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi I là trung điểm M_1M_2, ta được $I(1; 1; 2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cap vtcp } \overrightarrow{a_1} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (1; 4; -3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): x + 4y - 3z + 1 = 0.$

Nhận xét: Như vậy:

1. Để " *Chứng minh hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau* ", chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Ta có:

   - Với (d_1) xác định vtcp $\overrightarrow{a_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
   - Với (d_2) xác định vtcp $\overrightarrow{a_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

   Bước 2: Khẳng định: $[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

2. Để " *Lập phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2)* ", chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Ta có:

   - Với (d_1) xác định vtcp $\overrightarrow{a_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
   - Với (d_2) xác định vtcp $\overrightarrow{a_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

   từ đó suy ra toạ độ trung điểm I của M_1M_2.

   Bước 2: Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua I}\\ \text{cap vtcp } \overrightarrow{a_1} \text{ và } \overrightarrow{a_2}\end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases}\text{qua I}\\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]\end{cases}.$$

Bài tập 43.

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{a_1}(0; 2; 1)$ và điểm $M_1(1; -4; 3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{a_2}(-3; 2; 0)$ và điểm $M_2(3; 1; -2) \in (d_2)$.

Khi đó:

$$[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (2; 3; -6).(2; 5; -5) = 41 \Leftrightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases}\vec{a} \perp \vec{a}_1\\ \vec{a} \perp \vec{a}_2\end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (2; 3; -6).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(1;-4;3) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(1;-4;3) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_1}] = (15;-2;4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1)$: $15(x-1) - 2(y+4) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow (P_1)$: $15x - 2y + 4z - 35 = 0$.

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(3;1;-2) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(3;1;-2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_2}] = (12;18;13) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2)$: $12(x-3) + 18(y-1) + 13(z+2) = 0$

$\Leftrightarrow (P_2)$: $12x + 18y + 13z - 28 = 0$.

Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} 15x - 2y + 4z - 35 = 0 \\ 12x + 18y + 13z - 28 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (2; 3; -6).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(1;-4;3) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(1;-4;3) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_1}] = (15;-2;4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1)$: $15(x-1) - 2(y+4) + 4(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow (P_1)$: $15x - 2y + 4z - 35 = 0$.

Giả sử $(d) \cap (d_2) = \{B\}$ suy ra $(P_1) \cap (d_2) = \{B\}$, khi đó toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 15x - 2y + 4z - 35 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3; 1; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B(3;1;-2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2;3;-6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 6t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Cách 3: Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

Vì $A \in (d_1)$ suy ra $A(1;\ 2t-4;\ t+3)$.

Chuyển phương trình của (d_2) về dạng tham số:

$$(d_2): \begin{cases} x = -3u \\ y = 3 + 2u,\ u \in \mathbf{R} \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-3u;\ 2u+3;\ -2).$$

Từ điều kiện :

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(1, -2, 4), B(3, 1, -2)$.

Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B(1,-2,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(3,4,-6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 4 - 6t \end{cases}$$

Nhận xét:

1. Thông qua ví dụ trên, chúng ta đã biết được ba cách để " *Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau* ", cụ thể:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_1}] \end{cases} \Rightarrow (P_1)$$

Bước 3: Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_2}] \end{cases} \Rightarrow (P_2)$$

Bước 4: Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn: $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]$.

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \vec{a}_1] \end{cases} \Rightarrow (P_1)$$

Bước 3: Giả sử $(d) \cap (d_2) = \{B\}$ suy ra $(P_1) \cap (d_2) = \{B\} \Rightarrow$ toạ độ B.

Bước 4: Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua B} \\ \text{vtcp } \vec{a} \end{cases}.$$

Cách 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

Bước 2: Chuyển phương trình (d_1) và (d_2) về dạng tham số, suy ra tọa độ của A, B theo phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

Bước 3: Từ điều kiện : $\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \\ u \end{cases}$

$\Rightarrow$ toạ độ A, B

Bước 4: Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua B} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

2. Trong trường hợp hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P_1) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Dựng mặt phẳng (P_2) thoả mãn: $\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}$.

Bước 3: Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2).

Bài tập 44.

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{a_1}(0; -1; 1)$ và điểm $M_1(2; 1; 0) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{a_2}(4; 1; 1)$ và điểm $M_2(1; 2; 3) \in (d_2)$.

Khi đó: $[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; 4; 4).(-1; 1; 3) = 18 \Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

Mặt khác: $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2}$.

Vậy, (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Lấy $M_3(2,1,0)$; $M_4(-3,1,2)$.

Gọi I là trung điểm M_1M_2, ta được $I(-\frac{1}{2}; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{a_1} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(-\frac{1}{2}; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (-2; 4; 4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): 2x - 4y - 4z + 9 = 0.$

c. Vì (d_1) và (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau.

Dựng mặt phẳng (P_1)

$$(P_1): \begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{đi qua } M_1(2; 1; 0) \in (d_1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(4; 1; 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1): 4(x - 2) + 1.(y - 1) + 1.z = 0 \Leftrightarrow (P_1): 4x + y + z - 9 = 0.$

Dựng mặt phẳng (P_2)

$$(P_2): \begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{đi qua } M_2(1; 2; 3) \in (d_1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_1}(0; -1; 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2): 0.(x - 1) - 1.(y - 2) + 1.(z - 3) = 0 \Leftrightarrow (P_2): y - z + 1 = 0.$

Đường vuông góc chung (d) của (d_1) và (d_2) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), do đó có phương trình: (d): $\begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Chú ý:

1. Cũng có thể xác định được phương trình của các mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng việc sử dụng chùm mặt phẳng.
2. Ngoài ra cũng có thể thực hiện theo cách thông thường, cụ thể:

Cách 1: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (-2; 4; 4), \text{ chọn } \vec{a}(-1; 2; 2).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(2; 1; 0) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(2; 1; 0) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_1}] = (4; 1; 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1): 4(x - 2) + 1(y - 1) + z = 0 \Leftrightarrow (P_1): 4x + y + z - 9 = 0.$

Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(1; 2; 3) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(1; 2; 3) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_2}] = (0; 1; -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2): 1(y - 2) - 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow (P_2): y - z + 1 = 0.$

Phương trình (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2), có dạng:

$$(d): \begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{a}$ của (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{a}_1 \\ \vec{a} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] = (-2; 4; 4), \text{ chọn } \vec{a}(-1; 2; 2).$$

Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(2; 1; 0) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1(2; 1; 0) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{a}, \overrightarrow{a_1}] = (4; 1; 1) \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow (P_1): 4(x - 2) + 1(y - 1) + z = 0 \Leftrightarrow (P_1): 4x + y + z - 9 = 0.$

Giả sử $(d) \cap (d_2) = \{B\}$ suy ra $(P_1) \cap (d_2) = \{B\}$, khi đó toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2; 3).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B(1;\ 2;\ 3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1;\ 2;\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Cách 3: Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

Chuyển phương trình của (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = -u \\ z = 1 + u \end{cases},\ u \in \mathbf{R} \Rightarrow A(2;\ -u;\ 1 + u)$$

$$(d_2): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbf{R} \Rightarrow B(1 - t;\ 2 + 2t;\ 3 + 2t)$$

Từ điều kiện :

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2u = 0 \\ -t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 0$$

$\Rightarrow A(2;\ 0;\ 1)$ và $B(1;\ 2;\ 3)$.

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B(1;\ 2;\ 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

3. Cuối cùng, để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) chúng ta sử dụng công thức:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|}$$

trong đó:

- $\overrightarrow{a_1}$ là vtcp của (d_1) và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (d_2) và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Ngoài ra, nếu biết đoạn vuông góc chung AB thì

$d((d_1), (d_2)) = AB.$

Bài tập 45.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), bằng việc thay x, y, z ở phương trình của (d_1) vào (d_2), ta được:

$$\begin{cases} 4(-3+2t)+(-2+3t)-19=0 \\ (-3+2t)-(6+4t)+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow I(3;\ 7;\ 18).$$

Vậy $(d_1)\cap(d_2) = \{I(3;\ 7;\ 18)\}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2;\ 3;\ 4)$, $\vec{a}_2(1;\ -4;\ 1)$.

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{a_1} \text{ và } \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(3;7;18) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}] = (19;\ 2;\ -11) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $19(x-3)+2(y-7)-11(z-18)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $19x+2y-11z+123=0$.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Lấy $A(-3;\ -2;\ 6) \in (d_1)$ và $B(0;\ 19;\ 15) \in (d_2)$, có $A, B \neq I$.

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{IA} \text{ và } \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(3;7;18) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IB}] = (19;\ 2;\ -11) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $19(x-3)+2(y-7)-11(z-18)=0$

$\Leftrightarrow$ (P): $19x+2y-11z+123=0$.

✍ *Lời giải tự luận 3*: Lấy $A(-3,\ -2,\ 6) \in (d_1)$ và $B(0,\ 19,\ 15) \in (d_2)$, có $A, B \neq I$.

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax+By+Cz+D=0$, điều kiện $A^2+B^2+C^2>0$.

Vì ba điểm $I, A, B \in (P)$, ta được:

$$\begin{cases} 3A+7B+18C+D=0 \\ -3A-2B+6C+D=0 \\ 19B+15C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{19D}{123},\ B = \frac{2D}{123},\ C = -\frac{11D}{123}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$\Leftrightarrow$ (P): $\dfrac{19D}{123}x + \dfrac{2D}{123}y - \dfrac{11D}{123}z + D = 0$

$\Leftrightarrow$ (P): $19x+2y-11z+123=0$.

✍ *Lời giải tự luận 4*: Lấy $A(-3; -2; 6) \in (d_1)$ $(A \neq I)$.

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}.$$

- Vì $(d_2) \subset (P)$ nên (P) thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi (d_2), có dạng:

$$(P): A(4x + y - 19) + B(x - z + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (4A + B)x + Ay - Bz - 19A + 15B = 0.$$

(1)

- Điểm $A(-3, -2, 6) \in (P)$ nên:

$$(4A + B)(-3) - 2A - B.6 - 19A + 15B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{11A}{2}.$$

Thay $B = \frac{11A}{2}$ vào (1) được: (P): $19x + 2y - 11z + 123 = 0$.

Bài tập 46. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 47. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 48. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét mặt cầu (S), suy ra tâm $I(0, 1, 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có: $d(I, (d)) = \frac{1}{3} < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$.

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (S) và (d):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 9t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1/9 \end{array}\right..$$

- Với t = 1, thay vào phương trình của (d), ta được $A(0, 2, 1)$.
- Với $t = \frac{1}{9}$, thay vào phương trình của (d), ta được $B(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{7}{9})$.

Vậy, ta được $(d) \cap (S) = \{A, B\}$.

Bài tập 49. Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(2,1,0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1, m, -2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}, t \in R.$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) và phương trình mặt cầu (S), ta được phương trình:

$$(m^2 + 5)t^2 + 2(4m + 5)t + 20 = 0. \qquad (1)$$

Vậy số giao điểm của đường thẳng (d) và mặt cầu (S) là số nghiệm của phương trình (1).

Ta có $\Delta' = -4m^2 + 40m - 75$, do vậy:

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{15}{2} \\ m < \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ (d) không cắt (S).
- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{15}{2} \\ m = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ (d) tiếp xúc với (S).
- Nếu $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2} \Rightarrow \text{(d) cắt (S) tại hai điểm phân biệt.}$$

Bài tập 50. Ta có hai cách sau:

Cách 1: Xét mặt cầu (S), suy ra tâm I(1, 2, 1) và bán kính R = 1.

Ta có:

$$d = d(I, (d)) = \sqrt{\frac{347}{26}} > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$$

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (S) và (d) thấy vô nghiệm.

Vậy $(d) \cap (S) = \varnothing$.

Bài tập 51. $(d) \cap (S) = \{H(0, 1, 3)\}$.

Bài tập 52.

a. Ta có mặt phẳng $(P) \cap (S) = (C)$ có bán kính r, ta có:

$$2r.\pi = 8\pi \Rightarrow r = 4 \text{ và } R^2 = r^2 + d^2,$$

trong đó $d = d(I, (P)) = \dfrac{|2.1 + 2.2 - 2 + 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3;$

Từ đó, $R^2 = 5$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình : (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$.

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (S) là:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25\\ 2x-2=y+3=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5/3\\ y=-5/3\\ z=4/3\end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $M(\frac{5}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{4}{3})$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S), khi đó:

$$(Q): \begin{cases}\text{qua } M(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3})\\ \text{vtpt } \overrightarrow{MI}(\frac{2}{3},-\frac{11}{3},\frac{10}{3})\end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x-33y+30z-105=0.$$

Bài tập 53.

a. Ta có:

- Phương trình cạnh AB được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases}\text{qua } A\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(0,4,2)\end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases}x=1\\ y=-4+2t,\ t\in \mathbf{R}.\\ z=3+t\end{cases}$$

- Phương trình cạnh CD được cho bởi:

$$(CD): \begin{cases}\text{qua } C\\ \text{vtcp } \overrightarrow{CD}(6,-4,0)\end{cases} \Leftrightarrow (CD): \begin{cases}x=-3u\\ y=3+2u,\ u\in \mathbf{R}\\ z=-2\end{cases}$$

Gọi EF là đoạn vuông góc chung của (AB) và (CD) $(E \in (d_1), F \in (d_2))$. Khi đó, toạ độ của E, F theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là:

$E(1\ ;\ 2t-4\ ;\ t+3)$; $F(-3u\ ;\ 2u+3\ ;\ -2) \Rightarrow \overrightarrow{EF}(-3u-1;\ 2u-2t+7;\ -t-5)$.

Từ điều kiện:

$$\begin{cases}EF \perp AB\\ EF \perp CD\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=1\\ u=-1\end{cases}.$$

Ta xác định được toạ độ điểm E(1; −2; 4), F(3; 1; −2).

Khi đó:

- Phương trình đường vuông góc chung của (AB) và (CD) chính là phương trình (EF), được cho bởi:

$$(EF): \begin{cases} \text{qua } A(1, -2, 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2, 3, -6) \end{cases} \Leftrightarrow (EF): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 6t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- Khoảng cách giữa (AB) và (CD) chính là độ dài đoạn EF, được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = EF = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (4+2)^2} = 7.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0.$$

Điểm A, B, C, D $\in$ (S), ta được:

$$\begin{cases} 2a - 8b + 6c - d = 26 \\ 2a + 10c - d = 26 \\ 6b - 4c - d = 13 \\ 12a - 2b - 4c - d = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 106/49 \\ b = -25/98 \\ c = 25/49 \\ d = -116/7 \end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{212}{49}x + \frac{25}{49}y - \frac{50}{49}z - \frac{116}{7} = 0.$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Nhận xét rằng AB và CD có đoạn trung trực chung EF. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp ABCD có tâm I$\in$EF do đó I(1 + 2t; −2 + 3t; 4 − 6t).

$$\text{Vì } R^2 = IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow t = \frac{57}{98}$$

$$\Rightarrow \text{tâm } I\left(\frac{106}{49}, -\frac{25}{98}, \frac{25}{49}\right) \text{ và bán kính } R^2 = \frac{4229}{196}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): \left(x - \frac{106}{49}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{98}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{49}\right)^2 = \frac{4229}{196}.$$

Bài tập 54.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Từ I ∈ (d), ta được I(1 + 3t, t − 2, t).

(S) tiếp xúc với (P) và có bán kính bằng 1 khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(1+3t)+t-2-2t+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1/5 \end{array}\right..$$

- Với $t = -1$ suy ra $I_1(-2; -3; -1)$ ta được:

$$(S_1): (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 1.$$

- Với $t = \frac{1}{5}$ suy ra $I_2(\frac{8}{5}; -\frac{9}{5}; \frac{1}{5})$ ta được:

$$(S_2): (x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{9}{5})^2 + (z - \frac{1}{5})^2 = 1.$$

Vậy tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Toạ độ điểm M, bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$2(1+3t) - 2 + t - 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5} \Rightarrow M(-\frac{1}{5}; -\frac{12}{5}; -\frac{2}{5})$$

- Toạ độ tiếp điểm T
  - Với (S_1), ta có: Đường thẳng (d_1) qua I_1 và vuông góc với (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I_1(-2,-3,-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,1,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -2+2t \\ y = -3+t \\ z = -1-2t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào (P), ta được:

$$2(-2+2t) - 3 + t - 2(-1-2t) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow T_1(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}) \Rightarrow MT_1 = \frac{\sqrt{74}}{5}.$$

  - Với (S_2), tương tự

hoặc có thể sử dụng lập luận để khẳng định $MT_2 = MT_1 = \frac{\sqrt{74}}{5}$.

Bài tập 55. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Từ I∈(d), ta được I(t, 0, − 1).

(S) tiếp xúc với (P_1) và (P_2) khi và chỉ khi:

$$d(I,(P_1)) = d(I,(P_2)) = R \Leftrightarrow \frac{|3t+3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2t+1+39|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = R$$

$$\Rightarrow |9t+9| = |10t+200| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-191 \\ t=-11 \end{array}\right..$$

- Với $t = -191$ suy ra $I_1(-191, 0, -1)$ và $R_1 = 114$ ta được:

  (S_1): $(x+191)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12996.$
- Với $t = -11$ suy ra $I_2(-11, 0, -1)$ và $R_2 = 6$ ta được:

  (S_2): $(x+11)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 36.$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 56. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài. Nhận xét rằng $(P_1) // (P_2)$, suy ra $2R = d((P_1), (P_2))$. (1)

Lấy $A(0, 0, -1) \in (P_1)$, khi đó:

$$d((P_1),(P_2)) = d(A,(P_2)) = \frac{|0+0+2+4|}{\sqrt{1+4+4}} = 2 \Rightarrow 2R = 2 \Leftrightarrow R = 1.$$

Từ (S) tiếp xúc với (P_1) và (P_2), ta được:

$$d(I,(P_1)) = d(I,(P_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_0+2y_0-2z_0-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|x_0+2y_0-2z_0+4|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$\Leftrightarrow x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 1 = 0 \qquad (2)$$

Từ $I \in (d)$, ta được: $\begin{cases} 2x_0+4y_0-z_0-7=0 & (3) \\ 4x_0+5y_0+z_0-14=0 & (4) \end{cases}.$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) và (4), ta được:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 3 \\ z_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; 3; 3).$$

Vậy, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 3)$, bán kính R = 1 có dạng:

(S): $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1.$

Bài tập 57. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Nhận xét rằng SA = SB = SC = 2, $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$ suy ra SABC là hình chóp tam giác đều, do đó tâm I của mặt cầu nằm trong đoạn SG và thoả mãn: $\dfrac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{IG}} = -\dfrac{SM}{GM}$, (*)

trong đó:

- G là trọng tâm ΔABC nên $G(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3})$.
- M là trung điểm AB nên M(1, 3, 4).

Ta có (SG) có phương trình:

$$(SG): \begin{cases} \text{qua } S(1,2,3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{SG}(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow (SG): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$\Rightarrow I(1 + t, 2 + t, 3 + t)$,

$\overrightarrow{IS}(-t, -t, -t)$ và $\overrightarrow{IG}(-\frac{2}{3} - t, -\frac{2}{3} - t, -\frac{2}{3} - t)$.

Điều kiện (*) trở thành $-t = -\sqrt{3}(-\frac{2}{3} - t) \Leftrightarrow t = 1 - \sqrt{3}$.

Ta được:

- Tâm $I(2 - \sqrt{3}; 3 - \sqrt{3}; 4 - \sqrt{3})$.
- Bán kính $r^2 = IG^2 = \frac{52}{3} - 10\sqrt{3}$.

Vậy, mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): (x - 2 + \sqrt{3})^2 + (y - 3 + \sqrt{3})^2 + (z - 3 + \sqrt{3})^2 = \frac{52}{3} - 10\sqrt{3}.$$

Bài tập 58. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- $(S) \cap (P) = (C)$ đường tròn lớn, suy ra R = 4.
- Điểm $\{I\} = (P) \cap (d)$, toạ độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; 2; 2).$$

Vậy, mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16.$$

Bài tập 59. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Tâm I = (P)$\cap$(d), thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được:

$$(-1 + t) - 2(3 - t) - (-2 + t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(0; 2; -1).$$

- Gọi d là khoảng cách từ I tới mặt phẳng (Q), ta được:

$$d = d(I, (Q)) = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 1$$

Mặt phẳng (Q) $\cap$ (S) = (C) có bán kính r, ta có:

$$R^2 = r^2 + d^2 = r^2 + 1. \qquad (1)$$

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Với (C) có diện tích 16π, ta được:

$$r^2.\pi = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16 \overset{(1)}{\Rightarrow} R^2 = 17.$$

Vậy, mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 17.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Với (C) có chu vi bằng 2π, ta được:

$$2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} R^2 = 2.$$

Vậy, mặt cầu (S): $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$.

Bài tập 60. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi R = d(I, (d)), ta đi xác định R. Lấy điểm M(2, 0, 1) ∈ (d), suy ra $\overrightarrow{MI}(1; -2; 2)$.

- Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}(0, -1, 1).$$

- Khi đó khoảng cách từ I tới (d) được cho bởi $d(I, (d)) = \dfrac{|[\overrightarrow{MI}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = 1$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases}\text{tâm } I(1, 2, -1)\\ \text{bán kính } R = 1\end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1.$$

Bài tập 61. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) tại điểm H, suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) có phương trình cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } H(3,1,3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2,-1,3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - y + 3z - 14 = 0.$$

Khi đó, $\{I\} = (P) \cap (\Delta)$, toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 14 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 0; 2).$$

(S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: $R^2 = IH^2 = 18$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I(-1,0,2) \\ \text{bán kinh } R = 18 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 18.$$

Bài tập 62.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2)

$$\begin{cases} 1 + t = 2u \\ 2 + t = u \\ 3 + t = 2 \end{cases} \text{vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Từ phương trình của (d_1) và (d_2) suy ra

$\vec{a_1}$ (1; 1; 1), $\vec{a_2}$ (2; 1; 0) là vtcp của (d_1) và (d_2)

$\Rightarrow \vec{a_1}$ và $\vec{a_2}$ không cùng phương.

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (c_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra:

$I(v, -2v, 6 + v)$, $A(1 + t, 2 + t, 3 + t)$, $B(2u, u, 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}(1 + t - v, 2 + t + 2v, t - v - 3)$, $\overrightarrow{IB}(2u - v, u + 2v, -4 - w)$.

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{a_2} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{a_1} = 0 \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{a_2} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t - v + 2 + t + 2v + t - v - 3 = 0 \\ 2(2u - v) + u + 2v = 0 \\ (1 + t - v)^2 + (2 + t + 2v)^2 + (t - v - 3)^2 = (2u - v)^2 + (u + 2v)^2 + (4 + v)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = 0 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{toạ độ } I(\dfrac{1}{2}, -1, \dfrac{13}{2}) \\ IA = \dfrac{\sqrt{86}}{2} \end{cases}.$$

Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I(\dfrac{1}{2}, -1, \dfrac{13}{2}) \\ \text{bán kính } R = IA = \dfrac{\sqrt{86}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 + (z - \frac{13}{2})^2 = \frac{43}{2}.$$

Bài tập 63.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta được

$(d_1) \cap (d_2) = \{I(0; 1; 0)\}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình của (d_1) và (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - u \end{cases}, u \in \mathbf{R} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2v - 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, v \in \mathbf{R}$$

suy ra $\overrightarrow{a_1}(0, 0, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 0)$ là vtcp của (d_1) và (d_2).

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra:

$I(1 + t; t; t - 2)$, $A(0; 1; 1 - u)$, $B(2v - 2; 1; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}(-1 - t; 1 - t; 3 - u - t)$, $\overrightarrow{IB}(2v - t - 3; 1 - t; 2 - t)$.

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{a_2} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{a_1} = 0 \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{a_2} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - u - t = 0 \\ 2v - t - 3 = 0 \\ (-1 - t)^2 + (1 - t)^2 + (3 - u - t)^2 = (2v - t - 3)^2 + (1 - t)^2 + (2 - t)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ u = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{toạ độ } I(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}) \\ IA = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}.$$

Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}) \\ \text{bán kính } R = IA = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - \dfrac{3}{2})^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 + (z + \dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{5}{2}.$$

Chú ý: Nếu biết tận dụng điều kiện cắt nhau của (d_1) và (d_2), chúng ta có thể thực hiện yêu cầu của câu b) như sau:

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) suy ra tâm I thuộc mặt phẳng phân giác (P) của (d_1) và (d_2). Ta đi xác định phương trình (P).

Lấy $A(0, 1, 2) \in (d_1)$, $(A \neq I)$.

Gọi $B(2v - 2, 1, 0) \in (d_2)$ thoả mãn:

$$AI = BI \Leftrightarrow AI^2 = BI^2 \Leftrightarrow 4 = (2v - 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1(-2, 1, 0) \\ B_2(2, 1, 0) \end{array}\right. .$$

- Với $B_1(-2, 1, 0)$, suy ra phương trình mặt phẳng phân giác thứ nhất được xác định bởi: $(P_1): \begin{cases} \text{qua } I(0, 1, 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB_1}(-2, 0, -2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1)$: $x + z = 0$.

Khi đó, tâm $\{I_1\} = (P_1) \cap (d)$, bằng cách thay phương trình của (d) vào (P), ta được:

$$(1 + t) + (-2 + t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow I(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}).$$

Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}) \\ \text{bán kính } R = d(I, (d_1)) = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}.$$

- Với $B_2(2, 1, 0)$, tương tự (suy ra vô nghiệm).

Như vậy, với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau, để lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1) và (d_2) ngoài cách giải tổng quát chúng ta còn có thể lựa chọn cách:

Bước 1: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2), suy ra tâm I thuộc mặt phẳng phân giác (P) của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Xác định phương trình (P)

- Lấy $A \in (d_1)$, $(A \neq M$ và $\{M\} = (d_1) \cap (d_2))$.
- Tìm điểm $B \in (d_2)$ thoả mãn: $AM = BM$.
- Phương trình mặt phẳng phân giác (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định được toạ độ tâm I.

Bước 4: Mặt cầu (S) được cho bởi: $(S): \begin{cases} \text{tâm } I \\ \text{bán kính } R = d(I, (d_1)) \end{cases}$.

Bài tập 64.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2)

$$\begin{cases} 3 + 2t = 3 + 2u \\ 1 - t = -3 - u \\ 5 - t = 1 - u \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Từ phương trình của (d_1) và (d_2) suy ra

$\overrightarrow{a_1}(2, -1, -1)$, $\overrightarrow{a_2}(2, -1, -1)$ là vtcp của (d_1) và $(d_2) \Rightarrow \overrightarrow{a_1} \mathbin{//} \overrightarrow{a_2}$.

Vậy (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 4v \\ y = 1 + 3v \\ z = 2 - 5v \end{cases}, v \in \mathbf{R}$$

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra:

$$I(2 + 4v; 1 + 3v; 2 - 5v), A(3 + 2t; 1 - t; 5 - t), B(3 + 2u; -3 - u; 1 - u)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA}(1 + 2t - 4v; -t - 3v; 3 - t + 5v),$$

$$\overrightarrow{IB}(1 + 2u - 4v; -4 - u - 3v; -1 - u + 5v).$$

Ta có điều kiện:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{a_2} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{a_1} = 0 \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{a_2} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{6} \\ v = 0 \\ u = -\dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{toạ độ } I(2, 1, 2) \\ IA = \sqrt{\dfrac{59}{6}} \end{cases}.$$

Mặt cầu (S) được cho bởi: $(S): \begin{cases} \text{tâm } I(2, 1, 2) \\ \text{bán kính } R = IA = \sqrt{\dfrac{59}{6}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{59}{6}.$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) song song với (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2). Ta đi xác định phương trình (P).

Lấy $A(3, 1, 5) \in (d_1)$, gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên (d_2), ta có:

$$B(3 + 2t; -3 - t; 1 - t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t; -4 - t; -4 - t).$$

Vì $AB \perp (d_2)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2.2t - 1(-4 - t) - 1.(-4 - t) = 0 \Leftrightarrow 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right), \ \overrightarrow{AB}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right) \text{ chọn } \vec{n}(1; 1; 1).$$

Gọi M là trung điểm AB, ta được $M\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P) được xác định bởi: $(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow (P_1): x + y + z - 5 = 0.$$

Khi đó, tâm $\{I\} = (P) \cap (d)$, toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow I(2, 1, 2).$$

Mặt cầu (S) được cho bởi: (S): $\begin{cases} \text{tâm } I(2, 1, 2) \\ \text{bán kính } R = d(I, (d_1)) = \sqrt{\dfrac{59}{6}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{59}{6}.$$

Nhận xét: Như vậy, với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau, để lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1) và (d_2) ngoài cách giải tổng quát chúng ta còn có thể lựa chọn cách:

Bước 1: Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2), suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) song song và cách đều (d_1), (d_2).

Bước 2: Xác định phương trình (P)

- Lấy $A \in (d_1)$.
- Gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên (d_2). Tìm toạ độ của B.
- Gọi M là trung điểm AB, suy ra toạ độ của M.
- Phương trình mặt phẳng (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định được toạ độ tâm I.

Bước 4: Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I \\ \text{bán kính } R = d(I, (d_1)) \end{cases}.$$

Tiếp theo chúng ta sẽ khai thác tính chất của đoạn thẳng AB được tạo bởi mặt cầu và đường thẳng. Ta phát biểu bài toán dưới dạng:

" *Lập phương trình mặt cầu (S) cắt đường thẳng (d) cho trước theo hai điểm A, B có độ dài bằng l* ".

Bài tập 65. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I xuống AB suy ra H là trung điểm AB và IH = d(I, (d)) = 15. Khi đó:

(S) $\cap$ (d) = {A, B} với AB = 16 khi và chỉ khi:

$$R^2 = IA^2 = AH^2 + IH^2 = \frac{AB^2}{4} + IH^2 = 289$$

Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{tâm } I(2,3,-1) \\ \text{bán kính } R = 17 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289.$$

Bài tập 66.

a. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2, 1, 0)$, $\vec{a}_2(1, -1, 0) \Rightarrow \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} 2t + t - 3 = 0 \\ 8t + 4t + 12 - 12 = 0 \end{cases} \text{vô nghiệm} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \varnothing.$$

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình (d_2) về dạng tham số:

Lấy điểm $M(3, 0, 0) \in (d_2)$, khi đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } M(3,0,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{a_2}(1,-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 3 + u \\ y = -u \\ z = 0 \end{cases}, u \in \mathbf{R}.$$

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ($A \in (d_1)$; $B \in (d)$). Khi đó, toạ độ của A, B theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (d_1) và (d_2), tức là:

$$A(2t, t, 4); B(3+u, -u, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(u - 2t + 3, -u - t, -4).$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} AB \perp (d_1) \\ AB \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u - 2t + 3) + 1.(-u - t) = 0 \\ 1.(u - 2t + 3) - 1.(-u - t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ u = -1 \end{cases}.$$

- Thay t = 1 vào phương trình của (d_1) ta được A(2, 1, 4).
- Thay $u = \dfrac{25}{9}$ vào phương trình của (d_1) ta được B(2, 1, 0).

Khi đó $d((d_1), (d_2)) = AB = 4$.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) đường kính AB được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{1}{2}AB \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2, 1, 2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$$

Bài tập 67.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|3.1 - 4.2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có tâm I, tiếp xúc với (P), có dạng:

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$, bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét rằng $(P_1) // (P_2)$ suy ra $2R = d((P_1), (P_2)) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow R = \dfrac{2}{3}$.

Từ điều kiện: $\begin{cases} (S) \text{ tiếp xúc } (P_1) \\ (S) \text{ tiếp xúc } (P_2) \end{cases} \Rightarrow d(I, (P_1)) = d(I, (P_2))$

$$\Leftrightarrow x_0 + 2y_0 + 2z_0 + 5 = 0 \qquad (1)$$

Từ $I \in (d)$ suy ra: $\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \ (2) \\ x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \ (3) \end{cases}$.

Với (1), (2) và (3), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2z_0 + 5 = 0 \\ x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow I(3, -1, -3).$$

Vậy, mặt cầu (S) có phương trình: $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Bài tập 68.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

CHỦ ĐỀ 4

CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN TỚI ĐIỂM – ĐƯỜNG THẲNG – MẶT PHẲNG – MẶT CẦU

I. GIỚI THIỆU

Trong chủ đề này, chúng ta sẽ quan tâm tới các dạng toán có mối liên hệ giữa điểm, đường thẳng và mặt phẳng, bao gồm:

Bài toán 1: Điểm và mặt phẳng, trong đó bao gồm:

1. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P)
2. Lập phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P).
3. Xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua mặt phẳng (P).
4. Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua mặt phẳng (P).
5. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho
   a. MA + MB nhỏ nhất
   b. | MA – MB | lớn nhất

Bài toán 2: Điểm và đường thẳng, trong đó bao gồm:

1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất
2. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d)
3. Lập phương trình đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng (d) và cắt (d)
4. Xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua đường thẳng (d)
5. Lập được phương trình đường thẳng (d_2) đối xứng với đường thẳng (d_1) qua đường thẳng (d)
6. Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho:
   a. MA + MB nhỏ nhất
   b. | MA – MB | lớn nhất

Bài toán 3: Điểm và mặt cầu.

Bài toán 4: Góc trong không gian.

Bài toán 5: Tam giác trong không gian.

Bài toán 6: Khối đa diện.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Điểm và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt phẳng.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó

$$(P) \cap (L) = \{M\}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng đi qua hai điểm A, B với mặt phẳng (P).

A. $I(0; 0; -\frac{4}{5})$. **B.** $I(\frac{11}{5}; 0; 0)$.

C. $I(\frac{11}{5}; 0; \frac{4}{5})$. **D.** $I(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5})$.

b. Tìm toạ độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Bài tập 2. Cho điểm A(3; 3; 0) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(P): x + 2y - z - 3 = 0.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

A. H(1; 1; 1). **B.** H(2; 1; 1). **C.** H(2; 2; 1). **D.** H(2; 1; 2).

Bài tập 3. Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P), biết:

$$(d): \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (P): x - y + 4z + 7 = 0.$$

Bài tập 4. Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P), biết:

$$(d): \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-3} \text{ và } (P): x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Bài tập 5. Cho đường thẳng (d) và mp (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5},\ (P): 2x + y + z - 8 = 0.$$

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (P) và không vuông góc với (P), từ đó xác định toạ độ giao điểm I của (d) và (P).

A. $I(1; 0; \frac{8}{3})$ **B.** $I(\frac{8}{3}; 0; 1)$ **C.** $I(0; \frac{8}{3}; \frac{8}{3})$ **D.** $I(\frac{8}{3}; 0; \frac{8}{3})$

b. Lập phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P).

Bài tập 6. Cho họ đường thẳng (d) biết phương trình :

$$(d): \begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}.$$

a. Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (xOy).

b. Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d_1) luôn tiếp xúc với đường tròn cố định trong mặt phẳng (xOy).

Bài tập 7. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} \text{ và } (P): 2x - 2y + z - 3 = 0.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) với (P). Tính góc giữa (d) và (P).

b. Lập phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P). Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho AB = a, với a > 0 cho trước. Xét tỷ số $\frac{AB + AM}{BM}$ với M di động trên mặt phẳng (P).

Chứng tỏ rằng tồn tại một vị trí của M để tỷ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất ấy.

Bài tập 8. Cho điểm A(2, 3, – 1) và hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

$$(P_1): 2x - y - z - 5 = 0 \text{ và } (P_2): x + y + z - 7 = 0.$$

a. Xác định toạ độ các điểm B, C theo thứ tự là các điểm đối xứng của A qua (P_1), (P_2).

b. Tính diện tích ΔABC.

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $6 + \sqrt{2}$.

Bài tập 9. Cho mặt phẳng (P) có phương trình: (P): $2x + y - z + 4 = 0$.

Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P), biết:

a. (d): $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$. b. (d): $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t, t \in \mathbf{R}. \\ z = 5t \end{cases}$

c. (d): $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-5}{4}$.

Bài tập 10. Cho hai điểm A(1; 1; 2); B(2; 1; −3) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $2x + y - 3z - 5 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM + BM nhỏ nhất.

A. $M(1; 1; -\frac{6}{17})$. **B.** $M(\frac{2}{7}; 1; 1)$.

C. $M(\frac{5}{2}; 1; 2)$. **D.** $M(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17})$.

Bài tập 11. Cho hai điểm A(−1; 3; −2); B(−9; 4; 9) và mặt phẳng (P) có phương trình: (P): $2x - y + z + 1 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM + BM nhỏ nhất.

A. M(−1; 2; 3). **B.** M(1; 2; 3).

C. M(1; −2; 3). **D.** M(1; 2; −3).

Bài tập 12. Cho hai điểm A(1; 2; 3), B(4; 4; 5).

a. Viết phương trình đường thẳng (AB). Tìm giao điểm P của nó với mặt phẳng xOy. Chứng minh rằng với mọi điểm Q ∈ (xOy), biểu thức | QA − QB | có giá trị lớn nhất khi Q trùng với P.

b. Tìm điểm M trên mặt phẳng xOy sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất.

A. $N(\frac{1}{8}; \frac{22}{8}; 0)$. **B.** $N(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; 0)$.

C. $N(1; \frac{1}{2}; 0)$. **D.** $N(\frac{17}{8}; \frac{22}{8}; 0)$.

Bài tập 13. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

a. Với mỗi điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ hãy viết phương trình mặt phẳng (P_0) đi qua điểm M_0 và vuông góc với (d).

b. Tìm toạ độ giao điểm H_0 của (P_0) với (d) và tính khoảng cách M_0H_0.

c. Chứng minh rằng quỹ tích các điểm trong mặt phẳng xOy mà khoảng cách đến (d) bằng 2 là một Elíp. Xác định toạ độ các tiêu điểm của nó.

Bài tập 14. Cho ba điểm A(1; 4; 5), B(0; 3; 1), C(2; −1; 0) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0.$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của điểm G trên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ của điểm M đó.

A. M(−4; 1; 0). **B.** M(4; −1; 0).

C. M(4; 1; 0). **D.** M(−4; −1; 0).

Bài tập 15. Cho hai điểm A(−7; 4; 4); B(−6; 2; 3) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): 3x - y - 2z + 19 = 0.$$

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM + BM nhỏ nhất.

A. $M(-\frac{1}{3}; 2; 2)$. **B.** $M(-\frac{2}{3}; 2; 2)$.

C. $M(\frac{13}{3}; 2; 2)$. **D.** $M(-\frac{13}{3}; 2; 2)$.

Bài toán 2: Điểm và đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbf{R}. \\ y = z_0 + ct \end{cases}$$

Bước 2: Điểm M $\in$ (d), suy ra $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

Bước 3: Thiết lập tính chất K cho điểm M.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó $(d) \cap (L) = \{M\}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 16. Tìm điểm M trên Oy cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

$$(P_1): x + y - z + 1 = 0 \text{ và } (P_2): x - y + z - 5 = 0.$$

A. A(0; –3; 0). **B.** A(0; 3; 0). **C.** A(1; –3; 1). **D.** A(1; 3; 1).

Bài tập 17. Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất.

A. M(1; 1; –1). **B.** M(1; –1; 1).

C. M(–1; 1; 1). **D.** M(1; –1; –1).

Bài tập 18. Cho điểm A(1; 2; –1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d).

A. H(2; 2; –1). **B.** H(2; 2; 1). **C.** H(2; 1; –1). **D.** H(2; 1; 1).

Bài tập 19. Cho hai đường thẳng:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}, (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

a. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2).

b. Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm toạ độ điểm H thuộc (Δ_2) sao cho độ dài MH ngắn nhất.

A. H(1; 3; 3). **B.** H(2; 2; 3). **C.** H(2; 3; 3). **D.** H(2; 3; 4).

Bài tập 20. Cho điểm A(2; 3; −1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Lập phương trình đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d).

Bài tập 21. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2):

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

a. (d_1), (d_2) có cắt nhau hay không ?

b. Gọi B, C lần lượt là các điểm đối xứng của A(2; −4; −2) qua (d_1), (d_2). Tính diện tích ΔABC.

A. $2\sqrt{42}$. **B.** $2\sqrt{21}$. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Bài tập 22. Cho hai đường thẳng (d) và (d_1) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } (d_1): \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Lập phương trình đường thẳng (d_2) đối xứng với (d_1) qua (d).

Bài tập 23. Cho hai điểm A(1, 1, 0), B(3, − 1, 4) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất.

A. M(−1; 1; 2). **B.** M(1; −1; 2).

C. M(1; 1; −2). **D.** M(1; 1; 2).

Bài tập 24. Cho hai điểm A(9; 0; 9), B(12; −6; −3) và đường thẳng (d) có phương trình: $(d): \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 9 = 0 \end{cases}$.

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho:

a. MA + MB nhỏ nhất.

A. M(3; 4; 5). **B.** M(4; 4; 4). **C.** M(5; 4; 5). **D.** M(4; 4; 5).

b. | MA – MB | lớn nhất.

A. M(1; 0; 9). **B.** M(0; 1; 9). **C.** M(0; 0; 9). **D.** M(1; 1; 9).

Bài tập 25. Cho hai điểm A(a, 0, a), $B(\frac{4a}{3}; -\frac{2a}{3}; -\frac{a}{3})$ và đường thẳng (d) có phương trình: (d): $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Tìm điểm M thuộc (d) sao cho:

a. (MA + MB) nhỏ nhất.

A. $M(\frac{4a}{9}; \frac{4a}{9}; \frac{4a}{9})$. **C.** $M(\frac{5a}{9}; \frac{4a}{9}; \frac{5a}{9})$.

B. $M(\frac{4a}{9}; \frac{5a}{9}; \frac{5a}{9})$. **D.** $M(\frac{4a}{9}; \frac{4a}{9}; \frac{5a}{9})$.

b. | MA – MB | lớn nhất.

A. M(0; 0; a). **B.** M(1; 1; a). **C.** M(1; 2; a). **D.** M(0; 1; a).

Bài toán 3: Điểm và mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Tìm điểm M thuộc mặt cầu (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1 : Ta thực hiện theo các bước :

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0, z_0) \in (S)$, suy ra:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0, z_0.

Cách 2 : Thiết lập điều kiện để M là giao điểm của một đối tượng khác đối với mặt cầu (thường là đường thẳng).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 26. Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): (x - \frac{4}{3})^2 + (y + \frac{2}{3})^2 + (z + \frac{7}{3})^2 = \frac{8}{3}.$$

Tìm toạ độ điểm C thuộc (S) sao cho ΔABC đều.

Bài tập 27. Cho hình chóp SABC với S(3; 1; −2), A(5; 3; −1), B(2; 3; −4), C(1; 2; 0).

a. Chứng minh rằng SABC có đáy ABC là tam giác đều và ba mặt bên là các tam giác vuông cân.

b. Tính toạ độ điểm D đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB.

c. M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu tâm D, bán kính $R = \sqrt{18}$, (điểm M không thuộc mặt phẳng (ABC)). Xét tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB và MC. Hỏi tam giác đó có đặc điểm gì?

Bài tập 28. Cho mặt cầu (S) có phương trình: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. A(1; 0; 0). b. A(1; 1; 0).

Bài tập 29. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0,$$

$$(P): 2x - 2y + z + 6 = 0.$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 30. Cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0,$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. (P): $3x - 4y - 9 = 0$.

b. (P): $2x - 2y - z - 2 = 0$.

Bài tập 31. Cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0.$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \quad , t \in \mathbf{R}. \\ z = -1 \end{cases}$

b. (d): $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

c. (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad , t \in \mathbf{R}. \\ z = -1/2 \end{cases}$

Bài tập 32. Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0,$$

$$(P): x + 2y + 2z + 4 = 0.$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài toán 4: Góc trong không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ khác $\vec{0}$.

Gọi α là góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), theo thứ tự có vtcp là

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3),\ \vec{b}(b_1; b_2; b_3).$$

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Chú ý:

1. Điều kiện cần và đủ để $(d_1) \perp (d_2)$ là:

$$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

2. Trong nhiều bài toán ta lại áp dụng kết quả sau của hình không gian, bằng cách thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm góc, ta đi tìm điểm I nào đó thoả mãn:

$$\begin{cases} IA // (d_1) \\ IB // (d_2) \end{cases}$$

Khi đó, $g((d_1), (d_2)) = \widehat{AIB}$.

Bước 2: Tính góc:

- Nếu biết được toạ độ của $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ thì sử dụng công thức.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí cosin trong tam giác thường.

3. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), β là góc giữa đường thẳng (d) và đường thẳng chứa vtpt $\vec{n}$ $(0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2})$, thì $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Chú ý: Điều kiện để (d) // (P) (hoặc thuộc (P)) là $\sin\alpha = 0$

$$\Leftrightarrow a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0.$$

4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho:

- Mặt phẳng (P_1) có vtpt là $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$.
- Mặt phẳng (P_2) có vtpt là $\vec{m}(m_1; m_2; m_3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để $(P_1) \perp (P_2)$ là

$$\cos\alpha = 0, \text{ hay } m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 = 0.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 33. Xác định côsin góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

a. (d_1): $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$, (d_2): $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

A. $\dfrac{6}{\sqrt{151}}$. **B.** $\dfrac{6}{\sqrt{15}}$. **C.** $\dfrac{6}{\sqrt{11}}$. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{154}}$.

b. (d_1): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ và (d_2): $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$, $u \in \mathbf{R}$.

A. $\dfrac{13}{14}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Bài tập 34. Xác định côsin góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) biết:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \text{ và } (P): x + y + z + 1 = 0.$$

A. $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{11}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$. **D.** $\dfrac{3}{11}$.

Bài tập 35. Xác định côsin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) biết:

$$(P): x + y + 2z + 4 = 0 \text{và } (Q): 2x + y + z + 1 = 0.$$

A. $\dfrac{13}{14}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Bài tập 36. Cho các điểm A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(a; a; 0), D(0; 0; d), với a, d > 0. Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O xuống các đường thẳng DA, DB.

a. Lập phương trình mặt phẳng chứa các đường thẳng OA_1, OB_1. Chứng minh rằng mặt phẳng đó vuông góc với đường thẳng CD.

b. Tính d theo a để góc $\widehat{A_1OB_1}$ có số đo bằng 45^0.

A. $d = a\sqrt{2}$. **B.** $d = a\sqrt{3}$.

C. $d = a\sqrt{5}$. **D.** $d = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Bài tập 37. Cho ba điểm $H(\dfrac{1}{2}; 0; 0)$; $K(0; \dfrac{1}{2}; 0)$; $I(1; 1; \dfrac{1}{3})$.

a. Viết phương trình giao tuyến của (HIK) với mặt phẳng x + z = 0 ở dạng chính tắc.

b. Tính cosin của góc phẳng tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{89}}$. **B.** $\dfrac{9}{\sqrt{89}}$. **C.** $\dfrac{9}{\sqrt{8}}$. **D.** $\dfrac{11}{\sqrt{89}}$.

Bài tập 38. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): x + 2y - z + 5 = 0 \text{ và } (d): \frac{x+3}{2} = y + 1 = z - 3.$$

a. Tính toạ độ giao điểm của (d) và (P).

A. $I(-1; 0; 4)$. **B.** $I(1; 1; 4)$.

C. $I(-1; 2; 4)$. **D.** $I(1; 4; 5)$.

b. Tính góc giữa (d) và (P).

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\alpha = 45^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 90^0$.

c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).

d. Viết phương trình đường thẳng (Δ), nằm trên (P) đi qua giao điểm của (d) và (P) và vuông góc với (d).

Bài tập 39. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases} \quad (P): 3x + y - z + 1 = 0.$$

a. Tính sin của góc giữa (d) và (P).

A. $\frac{9}{11\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{19}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{19}{11\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

b. Hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

Bài tập 40. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, \text{ và } (d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}.$$

a. Tìm toạ độ một véctơ chỉ phương của đường thẳng (d_2).

A. $(-1; 4; 1)$. **B.** $(1; -4; 1)$.

C. $(1; 4; -1)$. **D.** $(-1; -4; 1)$.

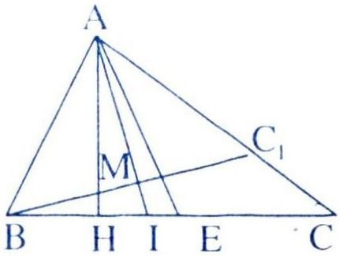
b. Tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng (d_1) và (d_2).

A. $\frac{2}{\sqrt{58}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{58}$.

Bài toán 5: Tam giác trong không gian.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với ΔABC trong không gian, yêu cầu thường được đặt ra là:



a. Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A.

b. Lập phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A.

c. Lập phương trình đường phân giác trong của góc A.

Để thực hiện các yêu cầu trên chúng ta thực hiện:

1. Với yêu cầu " *Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ đỉnh A và trung điểm E của cạnh BC.

Bước 2: Khi đó phương trình trung tuyến (AE) đi qua A và E.

2. Với yêu cầu " *Lập phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên BC.

Bước 2: Khi đó phương trình đường cao (AH) đi qua A và H.

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với BC.

Bước 3: Khi đó đường cao $(AH) = (ABC) \cap (P)$.

3. Với yêu cầu " *Lập phương trình đường phân giác trong của góc A* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I là chân đường phân giác trong góc A lên cạnh BC, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} = -\frac{AB}{AC} = k \Rightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{x_B - kx_C}{1-k} \\ y = \dfrac{y_B - ky_C}{1-k} \\ z = \dfrac{z_B - kz_C}{1-k} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AI}.$$

Bước 2: Phương trình đường phân giác (AI) được xác định bởi:

$$(\text{AI}): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{\text{AI}} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Phân tích*): Trên AC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

$$AB = AC_1 \quad (1)$$

$$C, C_1 \text{ cùng phía với } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC} \\ k > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Suy ra ΔABC_1 cân tại A, do đó đường phân giác trong của góc A của ΔABC cắt BC_1 tại M là trung điểm của BC_1. Vậy, đường phân giác trong của góc A chính là đường thẳng (AM).

Bước 2: (*Dựng*): Điểm $C_1 \in (AC)$, có toạ độ C_1 thoả mãn phương trình tham số của AC.

Giải (2) và (1) $\Rightarrow C_1 \Rightarrow M \Rightarrow \overrightarrow{AM}$

Bước 3: Phương trình đường phân giác (AM) được xác định bởi:

$$(\text{AM}): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{\text{AM}} \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 41. Cho ΔABC, biết $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

a. Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A

b. Lập phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A

c. Lập phương trình đường phân giác trong của góc B.

Bài tập 42. Cho ΔABC, biết $C(3; 2; 3)$ và phương trình đường cao AH, đường phân giác trong BM của góc B có phương trình:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ và } \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Bài tập 43. Cho ΔABC, biết $A(1; 2; 5)$ và phương trình hai trung tuyến là

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ và } \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

a. Lập phương trình chính tắc các cạnh của tam giác.

b. Lập phương trình chính tắc của đường phân giác trong của góc A.

Bài tập 44. Cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(0; 0; 1), B(−1; −2; 0) và C(2; 1; −1).

a. Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. (P): $5x - 4y + 3z - 3 = 0$. **C.** (P): $x - 4y + z - 6 = 0$.

B. (P): $5x - 4y + 3z - 9 = 0$. **D.** (P): $5x - y + 3z - 33 = 0$.

b. Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

A. $G(\frac{1}{3}; 1; 0)$. **B.** $G(1; \frac{1}{3}; 0)$.

C. $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$. **D.** $G(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$.

c. Lập phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (P).

d. Tìm toạ độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC.

A. $H(1; 1; -\frac{8}{9})$. **B.** $H(\frac{4}{9}; 1; 1)$.

C. $H(1; \frac{3}{2}; 1)$. **D.** $H(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19})$.

e. Thể tích tứ diện OABC bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Bài toán 6: Khối đa diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để thực hiện các bài toán về khối đa diện được cho dưới dạng toạ độ, ngoài việc sử dụng thành thạo các kiến thức của hình giải tích trong không gian chúng ta cũng cần sử dụng thêm một số kiến thức của hình học không gian để có được lời giải ngắn gọn.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 45. Cho hình tứ diện ABCD, biết toạ độ các đỉnh A(2; 3; 1), B(4; 1; −2), C(6; 3; 7), D(−5; −4; 8). Tính độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D.

A. 9. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 33.

Bài tập 46. Cho tứ diện ABCD, biết A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1).

a. Tìm hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) và tính thể tích tứ diện ABCD.

b. Lập phương trình tham số đường thẳng vuông góc chung của AC và BD.

Bài tập 47. Cho hình tứ diện có 4 đỉnh: O(0; 0; 0), A(6; 3; 0), B(−2; 9; 1), S(0; 5; 8).

a. Chứng minh rằng SB vuông góc với OA.

b. Chứng minh rằng hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với cạnh OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy xác định toạ độ của K.

A. K(1; 1; 0). **B.** K(2; 1; 0). **C.** K(2; 2; 0). **D.** K(2; 1; 1).

c. Gọi P, Q lần lượt là điểm giữa của các cạnh SO, AB. Tìm toạ độ của điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

A. $M(1; 1; \frac{8}{9})$. **B.** $M(\frac{4}{9}; 1; 1)$.

C. $M(1; \frac{3}{2}; 1)$. **D.** $M(-\frac{2}{3}; \frac{19}{3}; \frac{17}{3})$.

Bài tập 48. Cho tứ diện SOAB, với ΔOAB đều thuộc mặt phẳng (xOy) có cạnh bằng a, mặt phẳng AB song song với trục Oy, điểm A thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng (xOy) và điểm $S(0; 0; \frac{a}{3})$.

a. Hãy xác định toạ độ của các điểm A, B và trung điểm E của đoạn OA, sau đó viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa SE và song song với Ox.

b. Tính khoảng cách từ O đến (P), từ đó suy ra khoảng cách giữa Ox và SE.

Bài tập 49. Cho tứ diện ABCD, biết A(−1; 3; 2), B(4; 0; −3), C(5; −1; 4) và D(0; 6; 1).

a. Lập phương trình tham số của đường thẳng BC.

b. Hạ AH ⊥ BC. Tìm toạ độ của điểm H.

A. $H(1; 1; -\frac{8}{9})$. **B.** $H(\frac{4}{9}; 1; 1)$.

C. $H(1; \frac{3}{2}; 1)$. **D.** $H(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17})$.

c. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD).

A. $23x + 16y - z - 95 = 0$. **C.** $3x + y - z - 9 = 0$.

B. $2x + 6y - z - 5 = 0$. **D.** $23x + 11.y - 6z - 95 = 0$.

d. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\frac{72}{\sqrt{76}}$. **B.** $\frac{72}{\sqrt{87}}$. **C.** $\frac{72}{\sqrt{77}}$. **D.** $\frac{72}{\sqrt{786}}$.

Bài tập 50. Cho các điểm A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c) (a, b, c dương). Dựng hình hộp chữ nhật nhận O, A, B, C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với đỉnh O của hình hộp đó.

a. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

A. $\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}$. **C.** $\frac{ab}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}$.

B. $\frac{2abc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}$. **D.** $\frac{abc^2}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}$.

b. Tìm toạ độ hình chiếu C_1 vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD).

c. Tìm điều kiện đối với a, b, c để hình chiếu C_1 đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

A. $a^2+b^2-c^2=0$. **C.** $a^2-b^2+c^2=0$.

B. $(bc)^2+(ca)^2-(ab)^2=0$. **D.** $(bc)^2-(ca)^2+(ab)^2=0$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Phương trình đường thẳng (AB) được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0;0;-3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2;0;2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay các giá trị của x, y, z trong phương trình tham số của (AB) vào phương trình của (P) ta được:

$$3.2t-8.0+7(-3+2t)-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{11}{10} \Rightarrow I(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}).$$

b. Giả sử $C(x_0; y_0; z_0)$, vì $C(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ nên:

$$3x_0-8y_0+7z_0-1=0. \quad (1)$$

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi: $\begin{cases} AC=BC \\ AC=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2=BC^2 \\ AC^2=AB^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + (z_0 + 3)^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2 + (z_0 + 1)^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0 + 3)^2 = (2)^2 + (-1 + 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + z_0 + 1 = 0 & (2) \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 6z_0 + 1 = 0 & (3) \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = 2, y_0 = -2, z_0 = -3 \\ x_0 = -\frac{2}{3}, y_0 = -\frac{2}{3}, z_0 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow C_1(2; -2; -3) \text{ và } C_2(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}).$$

Vậy, tồn tại hai điểm C_1, C_2 thuộc (P) để tam giác ABC đều.

Bài tập 2. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; -1)$

Gọi (d) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(3; 3; 0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 2; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Vì hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P), do đó:

$$3 + t + 2(3 + 2t) + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(2; 1; 1).$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; -1)$

Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z}{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1; 1).$$

Nhận xét:

1. Như vậy để " *Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P)* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Lập phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc với (P).

Bước 3: Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử H(x, y, z) là hình chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ của H.}$$

2. Bằng việc xác định được hai điểm H_A, H_B là hai hình chiếu vuông góc của hai điểm A, B thuộc đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) ta lập được phương trình đường thẳng (d_1) (đi qua H_A và H_B) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên (P).

Tuy nhiên, để giảm bớt độ phức tạp khi phải xác định toạ độ của hai hình chiếu vuông góc, chúng ta lựa chọn phương pháp thực hiện tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d) và (P), cụ thể:

a. Nếu (d) ⊥ (P), ta có hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

b. Nếu (d) // (P), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm A ∈ (d), từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Bước 2: Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) // (d) \end{cases}.$$

c. Nếu (d) cắt (P), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I của (d) và (P)

Bước 2: Lấy điểm A∈(d), từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Bước 3: Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1 \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH_A} \end{cases}.$$

Bài tập 3. Ta có:

- Đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}$ (1; −1; 4).
- Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}$ (1; −1; 4).

suy ra

$$\vec{a} \,//\, \vec{n} \Leftrightarrow (d) \perp (P),$$

do đó hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P), có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4y + z - 2 = 0 \\ x - y + 4z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{19}{18}; \frac{17}{18}; -\frac{16}{9}\right).$$

Nhận xét: Như vậy thông qua việc đánh giá được $(d)\perp(P)$ ta nhận được kết luận về hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) chính là điểm I(1; 1; –2).

Bài tập 4. Ta có:

- Đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}(3; 1; -3)$.
- Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(1; 3; 2)$.

suy ra: $\vec{a}.\vec{n} = 3 + 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow$ (d) // (P) bởi tồn tại điểm A(2; 4; 3) ∈ (d) và A ∉ (P).

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $H_A(x, y, z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} \,//\, \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow H_A(1; 1; 1)$.

Phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) // (d) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A(1; 1; 1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(3; 1; -3) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát: (d): $\begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

- Vì (Q) chứa (d) nên thuộc chùm tạo bởi (d), có dạng:

$$(Q): A(x - 3y + 10) + B(x + z - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q): (A + B)x - 3Ay + Bz + 10A - 5B = 0. \qquad (1)$$

(Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(A + B; -3A; B)$.

- Để (Q) ⊥ (P) điều kiện là

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 1.(A + B) - 3.3A + 2B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{8A}{3}.$$

Thay $B = \frac{8A}{3}$ vào (1), ta được:

(Q): $11x - 9y + 8z - 10 = 0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q), được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ 11x - 9y + 8z - 10 = 0 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy, trong trường hợp (d) // (P) để xác định phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) ngoài việc sử dụng phương pháp dựa trên việc xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H_A của A lên (P), chúng ta còn có thể thực hiện theo cách:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Phương trình (d_1) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

Phương pháp này cũng sẽ được sử dụng cả trong trường hợp (d) cắt (P). Tuy nhiên một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên là " *Vì (d_1) thực chất là tập hợp các hình chiếu vuông góc của các điểm thuộc (d) lên (P) mà như đã biết các hình chiếu này có thể được xác định toạ độ bằng phương pháp tính chất điểm do đó liệu có thể xác định được phương trình của (d_1) bằng phương pháp quỹ tích hay không ?*", câu trả lời là có, cụ thể:

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M_1(x,y,z) \in (d_1)$ luôn tồn tại $M(2 + 3t; 4 + t; 3 - 3t) \in (d)$ thoả mãn

$$\begin{cases} M_1 \in (P) \\ MM_1 \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in (P) \\ \overrightarrow{MM_1} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ \dfrac{x - 2 - 3t}{1} = \dfrac{y - 4 - t}{3} = \dfrac{z - 3 + 3t}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z-6=0 \\ 3x-y=8t+2 \\ 2x-z=9t+1 \end{cases} \overset{9(2)-8(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+3y+2z-6=0 \\ 11x-9y+8z-10=0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1) cần tìm.

Các em học sinh hãy thông qua đây tự rút ra phương pháp cho bản thân.

Bài tập 5.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là một vtcp của (d) và vtpt của (P), ta có $\vec{a}(2; 3; 5)$, $\vec{n}(2; 1; 1)$

suy ra:

$\vec{a}.\vec{n} = 4 + 3 + 5 = 12$.

$\vec{a}$ và $\vec{n}$ không cùng phương.

Vậy, (d) cắt (P) và không vuông góc với (P).

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P), ta được $(d) \cap (P) = \{I(\frac{8}{3}; 0; \frac{8}{3})\}$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Lấy $A(2; -1; 1) \in (d)$.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta được:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z=1+t \end{cases}$$

Vì hình chiếu vuông góc H_A của A lên (P) chính là giao điểm của (Δ) và (P), do đó:

$$2(2+2t) + t - 1 + t + 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H_A(\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}).$$

Phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A(\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH_A}(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-\frac{10}{3}}{-2} = \frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{x-\frac{5}{3}}{3}.$$

Cách 2: Lấy $A(2; -1; 1) \in (d)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P):

$$\begin{cases} (d) \subset (Q) \\ (P) \perp (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(2;\ -1;\ 1) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2;\ 3;\ 5) \text{ và } \vec{n}(2;\ 1;\ 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(1;-4;2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 4y + 2z - 8 = 0.$$

Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ x - 4y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Cách 3: Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát:

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x - 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

- Vì (Q) chứa (d) nên thuộc chùm tạo bởi (d), có dạng:

$$(Q): A(3x - 2y - 8) + B(5x - 2z - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q): (3A + 5B)x - 2Ay - 2Bz - 8A - 8B = 0. \qquad (1)$$

(Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(3A + 5B; -2A; -2B)$.

- Để $(Q)\perp(P)$ điều kiện là

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 2.(3A + 5B) - 2A - 2B = 0 \Leftrightarrow A = -2B.$$

Thay A = −2B vào (1), ta được: (Q): $x - 4y + 2z - 8 = 0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q), được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ x - 4y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Cách 4: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số: $(d): \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t - 1 \\ z = 5t + 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

Đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M_1(x,y,z) \in (d_1)$ luôn tồn tại $M(2t + 2; 3t - 1; 5t + 1) \in (d)$ thoả mãn

$$\begin{cases} M_1 \in (P) \\ MM_1 \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in (P) \\ \overrightarrow{MM_1} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ \dfrac{x - 2t - 2}{2} = \dfrac{y - 3t + 1}{1} = \dfrac{z - 5t - 1}{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ x - 2y = 4 - 4t \\ y - z = -2t - 2 \end{cases} \overset{(2)-2(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ x - 4y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1) cần tìm.

Nhận xét: Như vậy, chúng ta đã biết được các phương pháp lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P), cùng với các trường hợp được phép lựa chọn dựa trên vị trí tương đối của (d) và (P).

Chúng ta sẽ tiếp tục khai thác khía cạnh này bởi chúng ta hiểu rằng khi chiếu (d) lên mặt phẳng toạ độ, cụ thể với mặt phẳng Oxy, chúng ta sẽ nhận được mối liên hệ giữa hình học giải tích trong không gian và hình học giải tích trong mặt phẳng.

Bài tập 6.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (xOy).

- (Q) chứa đường thẳng (d) do đó (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng: (Q): $A(x - my + z - m) + B(mx + y - mz - 1) = 0$

  $$\Leftrightarrow (Q): (A + mB)x + (-mA + B)y + (A - mB)z - mA - B = 0. \quad (1)$$

  (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(A + mB, -mA + B, A - mB)$.

- Vì $(Q) \perp (xOy)$ nên:

  $$(0; 0; 1).\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow (A + mB).0 + (-mA + B).0 + (A - mB).1 \Leftrightarrow A = mB.$$

  Thay $A = mB$ vào (1), được

  $$(Q): 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0.$$

  Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

  $$(d_1): \begin{cases} 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Bằng cách khử z từ phương trình tổng quát của (d), ta được:

$$2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0.$$

Vậy, phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) trên (xOy) có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0 \quad (*) \\ z = 0 \end{cases}.$$

b. Thật vậy:

- Gọi M(x, y) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng (xOy) mà (d_1) không đi qua với mọi m

  $\Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm $\forall m$

  $\Leftrightarrow$ phương trình $(y + 1)m^2 - 2xm - y + 1 = 0$ vô nghiệm $\forall m$

  $\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 1) < 0$.

- Ta đi chứng minh đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ luôn tiếp xúc với (d_1).

  Thật vậy, đường tròn (C) có tâm I(0,0) và bán kính R = 1, ta có:

$$d(I, (d_1)) = \frac{\left|-m^2 - 1\right|}{\sqrt{4m^2 + (m^2 - 1)^2}} = 1 = R.$$

Vậy, (d_1) luôn tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ cố định trong (xOy).

Bài tập 7.

a. Toạ độ giao điểm {A} = (d) ∩ (P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0 \\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A(-2; -1; 5).$$

- Tính sin của góc giữa (d) và (P).

  - Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có: $\vec{a}\,(1; 2; -2)$.
  - Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có: $\vec{n}\,(2; -2; 1)$.
  - Gọi α góc giữa (d) và (P), khi đó sinα được xác định bởi công thức:

$$\sin\alpha = \frac{\left|1.2 + 2.(-2) - 2.1\right|}{\sqrt{(2^2 + (-2)^2 + 1^2)(1^2 + 2^2 + (-2)^2)}} = \frac{4}{9}.$$

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P).

Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát (d): $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

- (Q) chứa đường thẳng (d) ⇒ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

$$(Q): A(2x - y + 3) + B(y + z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q): 2Ax + (B - A)y + Bz + 3A - 2B = 0. \qquad (1)$$

  (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}\,(2A; B - A; B)$.

- Vì (Q) ⊥ (P) nên: $\vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 2.2A - 2(B - A) + B = 0 \Leftrightarrow B = 6A$.

Thay B = 6A vào (1), được :

(Q): $2x + 5y + 6z - 9 = 0$.

Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q), có:

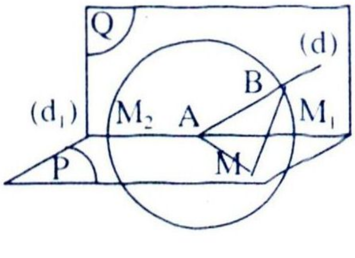
$$(d_1): \begin{cases} 2x + 5y + 6z - 9 = 0 \\ 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho AB = a, và điểm M thuộc (P). Xét ΔABM, ta có:

$$\frac{AB + AM}{BM} = \frac{2R\sin M + 2R\sin B}{2R\sin A} = \frac{\sin M + \sin B}{\sin A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{M+B}{2}.\cos\frac{M-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{M-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}. \quad (*)$$

Ta biết rằng:



$$0 < \alpha \le A < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} \le \sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

thay (1) vào (*), ta được: $\dfrac{AB + AM}{BM} \le \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Vậy, tồn tại vị trí của M để tỷ số $\dfrac{AB + AM}{BM}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \cos\frac{M-B}{2} = 1 \\ \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M} = \hat{B} \\ \hat{A} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow M \in (d_1): \Delta ABM \text{ cân tại } A \text{ với góc } A = \alpha.$$

Dựng M: trong (Q) dựng đường tròn tâm A bán kính R = a, cắt (d_1) tại 2 điểm M_1, M_2 và $M \equiv M_1$ chính là điểm cần dựng.

Chú ý: Để xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P), ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra: $\begin{cases} \text{trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc } (P) \\ AA_1 \perp (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\frac{x+x_A}{2}, \frac{y+y_A}{2}, \frac{z+z_A}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} \,//\, \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } A_1.$$

Bài tập 8.

a. Ta đi xác định B, C theo hai cách khác nhau:

- Xác định toạ độ điểm B.

  Mặt phẳng (P_1) có một vtpt $\overrightarrow{n_1}(2; -1; -1)$.

  Gọi (d) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(2; 3; -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_1}(2; -1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra H_1 chính là giao điểm của (d) và (P), do đó:

$$2(2 + 2t) - (3 - t) - (-1 - t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow H_1\left(3; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Vì H_1 là trung điểm AB, suy ra B(4; 2; −2).

- Xác định toạ độ điểm C.

  Mặt phẳng (P_2) có một vtpt $\overrightarrow{n_2}(1; 1; 1)$.

  Giả sử C(x, y, z), suy ra:

$$\begin{cases} \text{trung điểm } H_2 \text{ của AC thuộc } (P_2) \\ AC \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y+3}{2}; \frac{z-1}{2}\right) \in (P_2) \\ \overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{n_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y+3}{2}+\dfrac{z-1}{2}-7=0 \\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-10=0 \\ x-y+1=0 \\ x-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(4; 5; 1)$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Diện tích ΔABC được cho bởi :

$$S = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 6\sqrt{2} \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý: Bằng việc xác định được hai điểm A_1, B_1 là hai điểm đối xứng với A, B thuộc đường thẳng (d) qua mặt phẳng (P) ta lập được phương trình đường thẳng (d_1) (đi qua A_1 và B_1) là đường thẳng đối xứng (d) qua (P). Tuy nhiên, để giảm bớt độ phức tạp khi phải xác định tới hai điểm đối xứng, chúng ta lựa chọn phương pháp thực hiện tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d) và (P), cụ thể:

a. Nếu (d) ⊥ (P), ta có ngay $(d_1) \equiv (d)$.

b. Nếu (d) // (P), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Bước 2: Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi: (d_1): $\begin{cases} \text{qua } A_1 \\ (d_1) // (d) \end{cases}$.

c. Nếu (d) cắt (P), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I của (d) và (P)

Bước 2: Lấy điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Bước 3: Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi: (d_1): $\begin{cases} \text{qua } A_1 \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA_1} \end{cases}$.

Bài tập 9. Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2; 1; -1)$.

a. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(-2; -1; 1)$.

Nhận xét rằng $\vec{a} // \vec{n} \Leftrightarrow (d) \perp (P)$.

Vậy, $(d_1) \equiv (d)$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(3; -1; 5)$. Nhận xét rằng:

$$\vec{a}.\vec{n} = 2.3 - 1.1 - 1.5 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (d) // (P).$$

Lấy điểm A(0, 2, 0) thuộc (d) và gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua (P).

Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(0;2;0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra H chính là giao điểm của (Δ) và (P), do đó:

$$2.2t + 2 + t + t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-2; 1; 1).$$

Vì H là trung điểm AA_1, suy ra $A_1(-4; 0; 2)$.

Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(-4;0;2) \\ \text{vtcp } \vec{a}(3;-1;5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + 5t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

c. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(5; 0; 4)$.

Nhận xét rằng: $\vec{a}.\vec{n} = 2.5 - 1.4 = 6 \Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại I.

Xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (d):

$$\begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 1; 1).$$

Lấy điểm A(3; 1; 5) thuộc (d) và gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua (P).

Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(3;1;5) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra H chính là giao điểm của (Δ) và (P), do đó:

$$2.(3 + 2t) + 1 + t + t - 5 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; 0; 6).$$

Vì H là trung điểm AA_1, suy ra $A_1(-1; -1; 7)$.

Phương trình đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(-1, -1, 7) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA_1}(1, -2, 6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 7 + 6t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Nhận xét:

1. Thông qua lời giải trên chúng ta đã biết cách lập phương trình đường thẳng đối xứng với một đường thẳng qua một mặt phẳng tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của chúng, tuy nhiên nếu sử dụng phương pháp quỹ tích chúng ta sẽ không cần xét vị trí tương đối của chúng, để minh hoạ chúng ta xét với câu b).

   Vì (d_1) đối xứng với (d) qua (P) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M_1(x; y; z) \in (d_1)$ luôn tồn tại $M(3t; 2 - t; 5t) \in (d)$ thoả mãn

$$\begin{cases} \text{trung điểm I của } MM_0 \text{ thuộc (P)} \\ MM_1 \perp (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{x + 3t}{2}; \dfrac{y + 2 - t}{2}; \dfrac{z + 5t}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{MM_1}.// \vec{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.\dfrac{x + 3t}{2} + \dfrac{y + 2 - t}{2} - \dfrac{z + 5t}{2} + 4 = 0 \\ \dfrac{x - 3t}{2} = \dfrac{y - 2 + t}{1} = \dfrac{z - 5t}{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 10 = 0 \\ x - 2y = 5t - 4 \\ y + z = 4t + 2 \end{cases} \overset{4.(2)-5.(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x + y - z + 10 = 0 \\ 4x - 13y - 5z + 26 = 0 \end{cases}.$$

   Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1) cần tìm.

2. Như vậy, để "*Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P)*" bằng phương pháp quỹ tích, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

   Bước 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

   Bước 3: Vì (d_1) đối xứng với (d) qua (P) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M(x, y, z) \in (d_1)$ luôn tồn tại $M(t) \in (d)$ thoả mãn

$$\begin{cases}\text{trung điểm I của } MM_1 \text{ thuộc (P)}\\ MM_1 \perp (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P)\\ \overrightarrow{MM_1} // \vec{n}\end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 4: Khử t từ hệ (I), ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1).

Bài tập 10. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1:* Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = (2.1 + 1 - 3.2 - 5).(2.2 + 1 - 3(-3) - 5) = -8.9 = -72 < 0$$

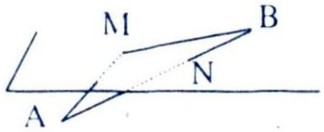
Vậy A, B khác phía đối với (P).

Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

- Gọi $N = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có:

  $$MA + MB \geq AB = NA + NB.$$

  Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.



Từ đó ta thực hiện:

- Phương trình (AB) được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases}\text{qua } A(1; 1; 2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(1; 0; -5)\end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 1 + t\\ y = 1\\ z = 2 - 5t\end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- Để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (AB) vào phương trình của (P) được:

$$2(1 + t) + 1 - 3(2 - 5t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{17} \Rightarrow N(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17}).$$

Vậy điểm $M(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ *Lời giải tự luận 2:* Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = (2.1 + 1 - 3.2 - 5).(2.2 + 1 - 3(-3) - 5) = -8.9 = -72 < 0$$

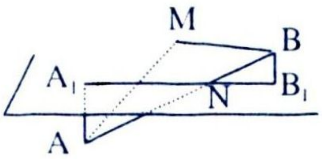
Vậy A, B khác phía đối với (P).

Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

- Gọi A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A, B lên (P) và điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có:

  A, B, N thẳng hàng,

  $$MA + MB \geq AB = NA + NB.$$



  Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.

Từ đó ta thực hiện:

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}(2; 1; -3)$

- Xác định A_1.

  Phương trình (AA_1) được xác định bởi:

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; 1; -3) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Vậy $\{A_1\} = (AA_1) \cap (P)$ khi đó để tìm toạ độ A_1 ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (AA_1) vào phương trình của (P) được:

$$2(1 + 2t) + 1 + t - 3(2 - 3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow A_1(\frac{15}{7}; \frac{11}{7}; \frac{2}{7}).$$

- Xác định B_1.

  Phương trình (BB_1) được xác định bởi:

$$(BB_1): \begin{cases} \text{qua } A(2; 1; -3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; 1; -3) \end{cases} \Leftrightarrow (BB_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Vậy $B_1 = (BB_1) \cap (P)$ khi đó để tìm toạ độ B_1 ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (BB_1) vào phương trình của (P) được:

$$2(2 + 2t) + 1 + t - 3(-3 - 3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{14} \Rightarrow B_1(\frac{5}{7}; \frac{5}{14}; \frac{15}{14}).$$

- Điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1} \Leftrightarrow N(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17}).$$

Vậy, điểm $M(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét:

1. Như vậy, để " *Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất, với A, B cho trước* " và ở về hai phía của (P), ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

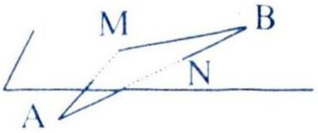
Bước 1: Khẳng định A, B khác phía đối với (P).

Bước 2: Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

Gọi $\{N\} = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có:

$$MA + MB \geq AB = NA + NB.$$

Vậy MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.



Bước 3: Từ đó ta thực hiện:

- Lập phương trình (AB).
- Xác định toạ độ N là giao điểm của (AB) và (P).

Bước 4: Kết luận $M \equiv N$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

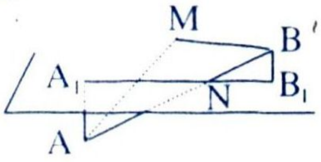
Bước 1: Khẳng định A, B khác phía đối với (P).

Bước 2: Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

Gọi A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A, B lên (P) và điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có: A, B, N thẳng hàng,

$$MA + MB \geq AB = NA + NB.$$

Vậy MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.



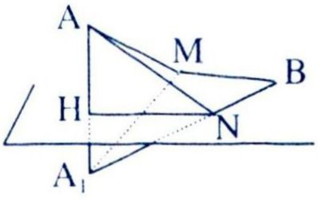
Bước 3: Từ đó ta thực hiện:

- Xác định A_1.
- Xác định B_1.
- Xác định toạ độ N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1}$

Bước 4: Kết luận $M \equiv N$ là điểm cần tìm.

2. Câu hỏi được đặt ra tiếp theo là khi A, B ở về một phía của (P) thì thực hiện ra sao ?

Bài tập 11. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.



✍ *Lời giải tự luận 1*: Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = (-6).(-12) = 72 > 0.$$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) và $\{N\} = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có:

  $$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B = NA + NB.$$

  Vậy MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.

Từ đó ta thực hiện:

- Xác định toạ độ A_1: Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2; -1; 1)$.

  Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi:

  $$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(-1; 3; -2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra $\{H\} = (AA_1) \cap (P)$, ta được:

  $$2(-1 + 2t) - (3 - t) + (-2 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 2; -1).$$

  Vì H là trung điểm AA_1, nên $A_1(3; 1; 0)$.

- Xác định toạ độ N: Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

  $$(A_1B): \begin{cases} \text{qua } A_1(3; 1; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-12; 3; 9) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Khi đó để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

  $$2(3 - 4t) - (1 + t) + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow N(-1; 2; 3).$$

Vậy, điểm M(− 1, 2,3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Xác định vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = (-6).(-12) = 72 > 0$$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

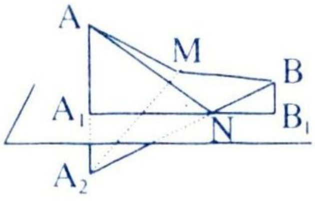
Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

- Gọi A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A, B lên (P) và điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1}$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (P), ta có:

A_2, B, N thẳng hàng,

$$MA + MB = MA_2 + MB \ge A_2B = NA_2 + NB = NA + NB.$$

Vậy MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.



Từ đó ta thực hiện:

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2; -1; 1)$.

- Xác định A_1.

Gọi (d_1) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), khi đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A(-1,3,-2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t_1 \\ y = 3 - t_1 \\ z = -2 + t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbf{R}.$$

Vì $\{A_1\} = (d_1) \cap (P)$, nên:

$$2(-1 + 2t_1) - (3 - t_1) + (-2 + t_1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$$

$$\Rightarrow A_1(1,2,-1) \text{ và } AA_1 = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{6}$$

- Xác định B_1.

Gọi (d_2) là đường thẳng qua B và vuông góc với (P), khi đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } B(-9; 4; 9) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = -9 + 2t_2 \\ y = 4 - t_2 \\ z = 9 + t_2 \end{cases}, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Vì $B_1 = (d_2) \cap (P)$, nên: $2(-9 + 2t_2) - (4 - t_2) + (9 + t_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 2$

$$\Rightarrow B_1(-5,2,11) \text{ và } BB_1 = \sqrt{(-5+9)^2 + (2-4)^2 + (11-9)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Vì N là điểm thuộc (P) chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1} = -2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA_1} = -2\,\overrightarrow{NB_1} \Leftrightarrow N(-1; 2; 3).$$

Vậy, điểm M(– 1, 2,3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý:

1. Như vậy, phương pháp để "*Tìm điểm **M** trên mặt phẳng (P) sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất, với **A**, **B** cho trước*" và ở về một phía của (P), là sự mở rộng nhỏ của trường hợp A, B ở về hai phía của (P) khi thay vai trò về độ dài của A bằng A_1 (trong cách 1) và bằng A_2 (trong cách 2).
2. Mở rộng phương pháp này được sử dụng để tìm M sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Bài tập 12.

a. Phương trình đường thẳng (AB) cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 2;\ 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(3;\ 2;\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

- Tìm giao điểm P của nó với mặt phẳng xOy.

Mặt phẳng xOy có phương trình $z = 0$, do đó:

$$3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow P(-\frac{7}{2};\ -1;\ 0).$$

- Chứng minh rằng với mọi điểm Q thuộc mặt phẳng xOy, biểu thức $|QA - QB|$ có giá trị lớn nhất khi Q trùng với P. Thật vậy:

$$t_A.t_B = 1.4 = 4 > 0 \Rightarrow A, B \text{ cùng phía với } xOy.$$

Xét ΔQAB, ta có

$$|QA - QB| \le AB.$$

Vậy, $|QA - QB|$ có giá trị lớn nhất khi Q trùng với P.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

Bài tập 13.

a. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta có $\vec{a}(1;\ 0;\ 1)$.

Mặt phẳng (P_0) đi qua điểm M_0 và vuông góc với (d), vậy:

$$(P_0): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{a}(1;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_0): x - x_0 + z - z_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_0): x + z - x_0 - z_0 = 0.$$

b. Toạ độ giao điểm H_0 của (P_0) với (d) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + z - x_0 - z_0 = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H_0\left(\frac{x_0 + z_0}{2};\ 0;\ \frac{x_0 + z_0}{2}\right)$$

Tính khoảng cách M_0H_0.

$$M_0H_0 = \sqrt{\left(\frac{x_0 + z_0}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2 + \left(\frac{x_0 + z_0}{2} - z_0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_0 - z_0)^2}{2} + y_0^2}\ .$$

c. Vì $M \in (xOy) \Rightarrow M(x; y; 0)$. Khi đó, với giả thiết d(M, (d) = 2, ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Vậy, quỹ tích các điểm trong mặt phẳng (xOy) mà khoảng cách đến (d) bằng 2 là một Elíp (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ với các tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và $F_1(2; 0)$.

Bài tập 14. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Chứng minh M ≡ H là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (P)

Với G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0},$$

và với mọi điểm M ∈ (P) luôn có:

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA} \Rightarrow MA^2=MG^2+GA^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}.$$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB} \Rightarrow MB^2=MG^2+GB^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC} \Rightarrow MC^2=MG^2+GC^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

suy ra:

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= 3MG^2+(MA^2+MB^2+MC^2)+\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2+(GA^2+GB^2+GC^2) \end{aligned}$$

Vậy:

$MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất ⇔ MG nhỏ nhất

⇔ M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (P) ⇔ M ≡ H.

- Xác định toạ độ điểm M

Toạ độ điểm G(1; 2; 2). Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(3; -3; -2)$.

Gọi (d) là đường thẳng qua G và vuông góc với (P), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } G(1;\ 2;\ 2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3;\ -3;\ -2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-3t\ ,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 2-2t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), ta có $\{H\} = (d) \cap (P)$.

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$3(1+3t)-3(2-3t)-2(2-2t)-15=0. \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(4; -1; 0).$

Bài tập 15. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = [3(-7) - 4 - 2.4 + 19].[3(-6) - 2 - 2.3 + 19] = -14.(-7) = 98 > 0$$

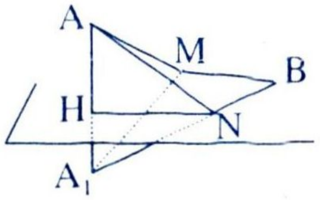
Vậy A, B cùng phía đối với (P).

Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) và $\{N\} = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), ta có:

$$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B = NA + NB.$$

Vậy MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv N$.



Từ đó ta thực hiện:

- Xác định toạ độ A_1.

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(3; -1; -2)$.

Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi:

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(-7;4;4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3;-1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra $\{H\} = (AA_1) \cap (P)$, ta được:

$$3(-7 + 3t) - (4 - t) - 2(4 - 2t) + 19 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(-4; 3; 2).$$

Vì H là trung điểm AA_1, nên $A_1(-1; 2; 0)$.

- Xác định toạ độ N

Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B): \begin{cases} \text{qua } A_1(-1;2;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-5;0;3) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Khi đó, để tìm toạ độ N ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

$$3(-1 - 5t) - 2 - 2.3t + 19 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow N(-\frac{13}{3}; 2; 2).$$

Vậy điểm $M(-\frac{13}{3}; 2; 2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Xét vị trí tương đối của A, B đối với (P), ta có:

$$t_A.t_B = [3(-7) - 4 - 2.4 + 19].[3(-6) - 2 - 2.3 + 19] = -14.(-7) = 98 > 0$$

Vậy A, B cùng phía đối với (P).

Ta có phân tích sau để xác định các bước thực hiện:

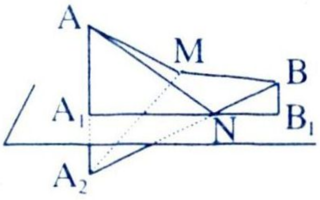
- Gọi A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A, B lên (P) và điểm N chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1}$, khi đó với điểm M bất kỳ thuộc (P), gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua (P), ta có:

  A_2, B, N thẳng hàng,

  $MA + MB = MA_2 + MB$

  $\geq A_2B = NA_2 + NB = NA + NB.$

  Vậy MA + MB nhỏ nhất ⇔ M ≡ N.



Từ đó, ta thực hiện:

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}(2; -1; 1)$.

- Xác định A_1.

  Gọi (d_1) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P), khi đó:

$$(AA_1): \begin{cases} \text{qua } A(-7; 4; 4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3; -1; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Vì $\{A_1\} = (d_1) \cap (P)$, nên:

$$3(-7 + 3t) - (4 - t) - 2(4 - 2t) + 19 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A_1(-4; 3; 2).$$

- Xác định B_1.

  Gọi (d_2) là đường thẳng qua B và vuông góc với (P), khi đó:

$$(BB_1): \begin{cases} \text{qua } B(-6; 2; 3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(3; -1; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (BB_1): \begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

  Vì $\{B_1\} = (d_2) \cap (P)$, nên:

$$3(-6 + 3t) - (2 - t) - 2(3 - 2t) + 19 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B_1\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}; 2\right).$$

Gọi N là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NA_1}}{\overrightarrow{NB_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1} \Leftrightarrow N(-\frac{13}{3}; 2; 2).$$

Vậy, điểm $M(-\dfrac{13}{3}; 2; 2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 16. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Điểm $A \in Oy \Rightarrow A(0; b; 0)$.

Theo giả thiết, ta có :

$$d(A, (P_1)) = d(A, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|b+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-b-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow A(0; -3; 0).$$

Vậy tồn tại điểm $A(0; -3; 0)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 17. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \text{ , } t \in \mathbf{R}. \\ z = -t - 2 \end{cases}$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(t + 2; 2t + 1; -t - 2)$.

Khi đó: $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (t + 2)^2 + (2t + 1)^2 + (-t - 2)^2 = 6t^2 + 12t + 9$

$$= 6(t + 1)^2 + 3 \geq 3.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)_{Min} = 3$ đạt được khi $t = -1 \Rightarrow M(1; -1; -1)$.

Bài tập 18. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = t \quad \text{, } t \in \mathbf{R} \text{ có vtcp } \vec{a}\,(0; 1; -1). \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra

$H(2; t; 1 - t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(1; t - 2; 2 - t)$,

$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow t - 2 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(2; 2; -1)$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(0;\,-1;\,1).$$

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn :

$$(P):\begin{cases}\text{qua } A\\ (P)\perp(d)\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{qua } A(1;2;-1)\\ \text{vtpt } \vec{a}(0;-1;1)\end{cases} \Leftrightarrow (P):\ y - z - 3 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra:

$H\} = (d) \cap (P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+z-3=0\\ y+z-1=0\\ y-z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=-1\end{cases} \Rightarrow H(2;\,2;\,-1).$$

Chú ý:

1. Để tránh được việc phải chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số (trong cách 1) cũng như việc lập phương trình mặt phẳng (P) (trong cách 2), chúng ta có thể trình bày như sau:

   Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta được $\vec{a}\,(0;\,-1;\,1)$.

   Gọi $H(x;\,y;\,z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra

$$\begin{cases}H\in(d)\\ AH\perp(d)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}H\in(d)\\ \overrightarrow{AH}\perp\vec{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}H\in(d)\\ \overrightarrow{AH}.\vec{a}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z-3=0\\ y+z-1=0\\ y-z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=-1\end{cases} \Rightarrow H(2;\,2;\,-1).$$

2. Như vậy, để "*Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d)* ", ta lựa chọn một trong các cách giải sau:

Cách 1: Áp dụng với (d) cho dưới dạng tham số, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra toạ độ của H thoả mãn phương trình tham số.

Bước 3: Ta có điều kiện: $AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{a}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\,.\,\vec{a} = 0 \Rightarrow \text{toạ độ H}$$

Cách 2: Áp dụng với (d) cho dưới dạng tổng quát, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Gọi H(x, y, z) là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (d) \\ AH \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ H.}$$

Cách 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn : (P): $\begin{cases} \text{qua A} \\ (P) \perp (d) \end{cases}$.

Bước 3: Hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng (d) là giao điểm của (d) và (P).

3. Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc "*Tìm toạ độ điểm H thuộc (d) sao cho độ dài AH ngắn nhất*".

Bài tập 19.

a. Ta có: Gọi $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (Δ_2), ta được $\overrightarrow{a_2}(1; 1; 2)$.

- (P) chứa (Δ_1) ⇔ (P) thuộc chùm tạo bởi (Δ_1), có dạng:

$$(P): A(x - 2y + z - 4) + B(x + 2y - 2z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): (A + B)x + 2(B - A)y + (A - 2B)z - 4A + 4B = 0$$

có vtpt $\overrightarrow{n_P}(A + B; 2B - 2A; A - 2B)$.

- (P) // (Δ_2) điều kiện là: $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_2} = 0$

$$\Leftrightarrow 1.(m + 1) + 1.2(m - 1) + 2.(1 - 2m) = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, phương trình của (P) có dạng: (P): $2x - z = 0$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: H thuộc (Δ_2) sao cho độ dài MH ngắn nhất

$$\Leftrightarrow \text{H là hình chiếu vuông góc của M lên } (\Delta_2) \Leftrightarrow \{H\} = (Q) \cap (\Delta_2)$$

trong đó: (Q): $\begin{cases} \text{qua M} \\ (Q) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow$ (Q): $\begin{cases} \text{qua } M(2; 1; 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(1; 1; 2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (Q): x = y + 2z - 11 = 0.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (Δ_2) vào phương trình của (Q), ta được:

$$t = 1 \Rightarrow H(2;\ 3;\ 3).$$

Chú ý: Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc " *Lập được phương trình đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d)* ".

Bài tập 20. Gọi (d_1) là đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d), vậy (d_1) qua A và H (H là hình chiếu vuông góc của A lên (d)).

- Xác định H: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}\,(2;\ 4;\ 1)$.

  Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 + t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

  Vì $H \in (d)$, nên

$$H(2t;\ 4t;\ 3 + t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\ (2t - 2;\ 4t - 3;\ 4 + t).$$

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 2) + 4(4t - 3) + 4 + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow H(\frac{8}{7};\ \frac{16}{7};\ \frac{25}{7}).$$

Phương trình (d_1) được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } A(2;\ 3;\ -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(\frac{6}{7}; \frac{5}{7};\ -\frac{32}{7}) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-32}.$$

Chú ý:

1. Có thể xác định được phương trình (d_1) bằng cách:

   Dựng (P_1) và (P_2) thoả mãn: $(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_1) \perp (d) \end{cases}$ và $(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d) \subset (P_2) \end{cases}$.

   Khi đó $(d_1) = (P_1) \cap (P_2)$.

   Chúng ta sẽ còn gặp lại dạng toán này khi thực hiện lập phương trình đường cao cho tam giác trong không gian.

2. Để xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d), ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (d).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Giả sử $A_1(x, y, z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\frac{x+x_A}{2}, \frac{y+y_A}{2}, \frac{z+z_A}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } A_1.$$

Bài tập 21.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1), (d_2), ta được

$t = 0 \Rightarrow I(0; -1; 0)$.

Vậy, $(d_1) \cap (d_2) = \{\, I(0; -1; 0)\}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta đi xác định B, C theo hai cách khác nhau:

- Xác định toạ độ điểm B.

  Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{a_1}$ $(1; -2; -3)$.

  Giả sử B(x, y, z), suy ra:

$$\begin{cases} \text{trung điểm } H_1 \text{ của AB thuộc } (d_1) \\ AB \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y-4}{2}; \frac{z-2}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2y - 3z - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2; -4).$$

- Xác định toạ độ điểm C.

  Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{a_2}$ $(3; 2; 0)$.

  Gọi H_2 là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d_1), suy ra

$$H_2(3t, 2t - 1, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AH_2}\,(3t - 2; 2t + 3; 2),$$

$$AH_2 \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH_2} \perp \vec{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH_2}.\vec{a_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(3t - 2) + 2(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H_2(0; -1; 0).$$

Vì H_2 là trung điểm của AC, do đó C(−2; 2; 2).

Diện tích ΔABC được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 2\sqrt{42} \text{ (dvdt).}$$

Chú ý: Bằng việc xác định được hai điểm A_1, B_1 là hai điểm đối xứng với A, B thuộc đường thẳng (d_1) qua đường thẳng (d) ta lập được phương trình đường thẳng (d_2) (đi qua A_1 và B_1) là đường thẳng đối xứng (d_1) qua (d).

Bài tập 22. Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1; 1)$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Lấy hai điểm A(1; 2; −1) và B(2; 0; 1) thuộc (d_1), ta đi xác định các điểm A_1 và B_1 theo thứ tự là hai điểm đối xứng với A, B qua đường thẳng (d).

- Xác định toạ độ A_1.

  Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t, \ t \in \mathbf{R}. \\ z = t \end{cases}$$

  Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), suy ra

$$H(2t; 1 - t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(2t - 1; -t - 1; t + 1),$$

$$AH \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.(2t - 1) + (-1).(-t - 1) + 1.(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(0; 1; 0).$$

  Vì H là trung điểm của AA_1, do đó $A_1(-1; 0; 1)$.

- Xác định toạ độ B_1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tổng quát:

$$(d): \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

  Giả sử $B_1(x, y, z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{trung điểm } H_1 \text{ của } BB_1 \text{ thuộc (d)} \\ BB_1 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H(\frac{x+2}{2}; \frac{y}{2}; \frac{z+1}{2}) \in (d) \\ \overrightarrow{BB_1}.\vec{a} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow B_1(2;\ 0;\ 1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_2) được cho bởi:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } A_1(-1;0;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B_1}(3;0;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tổng quát:

$$(d): \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}.$$

Chuyển phương trình đường thẳng (d_1) về dạng tham số

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

Vì (d_2) đối xứng với (d_1) qua (d) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M(x;\ y;\ z) \in (d_2)$ luôn tồn tại $M_0(1 + t,\ 2 - 2t,\ 2t - 1) \in (d_1)$ thoả mãn

$$\begin{cases} \text{trung điểm I của } MM_0 \text{ thuộc (d)} \\ MM_0 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{x+1+t}{2}; \dfrac{y+2-2t}{2}; \dfrac{z+2t-1}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{MM_0}.\vec{a} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1+t}{2} + 2.\dfrac{y+2-2t}{2} - 2 = 0 \\ \dfrac{x+1+t}{2} - 2.\dfrac{z+2t-1}{2} = 0 \\ 2(x-1-t) - (y-2+2t) + (z+1-2t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3t - 1 \\ x - 2z = 3t - 3 \\ 2x - y + z = 6t - 1 \end{cases} \overset{2(1)-(3)}{\underset{2(2)-(3)}{\Rightarrow}} \begin{cases} 5y - z + 1 = 0 \\ y - 5z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_2) cần tìm.

Chú ý: Như vậy để " *Lập phương trình đường thẳng* (d_2) *đối xứng với đường thẳng* (d_1) *qua đường thẳng* (d) ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy hai điểm A, B phân biệt thuộc (d_1).

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm A_1, B_1 đối xứng với A, B qua (d).

Bước 3: (d_2) chính là đường thẳng đi qua A_1, B_1.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát và đường thẳng (d_1) về dạng tham số theo t.

Bước 3: Vì (d_2) đối xứng với (d_1) qua (d) khi và chỉ khi với mỗi điểm $M(x, y, z) \in (d_2)$ luôn tồn tại $M_0(t) \in (d_1)$ thoả mãn

$$\begin{cases} \text{trung điểm I của } MM_0 \text{ thuộc } (d) \\ MM_0 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (d) \\ \overrightarrow{MM_0}.\vec{a} = 0 \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Bước 4: Khử t từ hệ (I), ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng (d_2).

Bài tập 23. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}, \text{ khi đó, } M \in (d) \text{ có } M(t - 1;\ 1 - t;\ 2t - 2).$$

Ta có: $MA + MB$

$$= \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + (2t-2)^2} + \sqrt{(t-4)^2 + (2-t)^2 + (2t-6)^2}$$

$$= \sqrt{6t^2 - 12t + 8} + \sqrt{6t^2 - 36t + 56}$$

$$= \sqrt{6}\left(\sqrt{(t-1)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t-3)^2 + \frac{1}{3}}\right). \quad (1)$$

Xét các điểm $A_0(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$, $B_0(3; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$ và $I_0(t; 0; 0)$, khi đó (1) được viết lại dưới dạng: $MA + MB = \sqrt{6}\,(A_0I_0 + B_0I_0)$

Từ đó MA + MB nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow A_0I_0 + B_0I_0 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow A_0, B_0, I_0 \text{ thẳng hàng}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0I_0} // \overrightarrow{B_0I_0} \Leftrightarrow \frac{t-1}{t-3} = \frac{-1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(1; -1; 2).$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được tại M(1; −1; 2).

✍ *Lời giải tự luận 2*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

khi đó, (d) có vtcp $\vec{a}(1, -1, 2)$.

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d).

  Điểm $A_1 \in (d)$, suy ra :

  $$A_1(t - 1; -t + 1; 2t - 2) \text{ và } \overrightarrow{AA_1}(t - 2; -t; 2t - 2).$$

  Vì $\overrightarrow{AA_1} \perp (d)$ nên:

  $$\overrightarrow{AA_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 2) - (-t) + (2t - 2) = 0$$

  $$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A_1(0,0,0),\ \overrightarrow{AA_1}(-1, -1, 0) \text{ và } AA_1 = \sqrt{2}$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d).

  Điểm $B_1 \in (d)$, suy ra

  $$B_1(t - 1; -t + 1; 2t - 2) \text{ và } \overrightarrow{BB_1}(t - 4; -t + 2; 2t - 6).$$

  Vì $\overrightarrow{BB_1} \perp (d)$ nên:

  $$\overrightarrow{BB_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 4) - (-t + 2) + (2t - 6) = 0$$

  $$\Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow B_1(2; -2; 4),\ \overrightarrow{BB_1}(1; -1; 0) \text{ và } BB_1 = \sqrt{2}.$$

- Gọi $M_0 \in (d)$ là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} = -1$

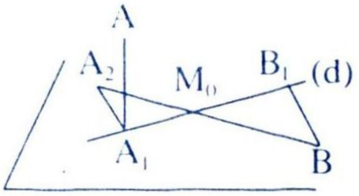
  $$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0A_1} = -\overrightarrow{M_0B_1} \Leftrightarrow M_0(1; -1; 2).$$

Ta đi chứng minh rằng MA + MB nhỏ nhất ⇔ $M \equiv M_0$.

Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2, B, M_0$ thẳng hàng



Từ đó:

$$MA + MB = MA_2 + MB$$

$$\geq A_2B = M_0A + M_0B = 4\sqrt{2}.$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được khi $M \equiv M_0(1; -1; 2)$.

Nhận xét: Như vậy để thực hiện yêu cầu " *Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất, với A, B cho trước* ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số.

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ t \in \mathbf{R} \\ y = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow M(x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct)$$

Bước 2: Với $A(x_A, y_A, z_A)$ và $B(x_B, y_B, z_B)$, ta có:

$$MA + MB = \sqrt{(at + x_0 - x_A)^2 + (bt + y_0 - y_A)^2 + (ct + z_0 - z_A)^2}$$

$$+ \sqrt{(at + x_0 - x_B)^2 + (bt + y_0 - y_B)^2 + (ct + z_0 - z_B)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\left(\sqrt{(t - k_1)^2 + d_1^2} + \sqrt{(t - k_2)^2 + d_2^2}\right)$$

Xét các điểm $A_0(k_1, d_1, 0)$, $B_0(k_2, d_2, 0)$ và $I_0(t, 0, 0)$, với điều kiện $d_1.d_2 < 0$, khi đó biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$MA + MB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(A_0I_0 + B_0I_0)$$

Bước 3: Từ đó MA + MB nhỏ nhất

$\Leftrightarrow A_0I_0 + B_0I_0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_0, B_0, I_0$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0I_0} \,//\, \overrightarrow{B_0I_0} \Rightarrow$ giá trị $t \Rightarrow$ toạ độ điểm M.

Bước 4: Kết luận.

Lưu ý: Điểm mấu chốt trong cách giải này là ở bước 2, với việc lựa chọn ba điểm A_0, B_0, I_0 thuộc mặt phẳng Oxy và A_0, B_0 ở về hai phía của trục x'Ox.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số.

Bước 2: Xác định toạ độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d), từ đó suy ra độ dài AA_1.

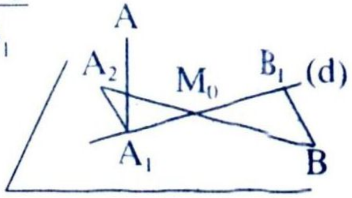
Bước 3: Xác định toạ độ điểm B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d), từ đó suy ra độ dài BB_1.

Bước 4: Xác định toạ độ điểm M_0 chia đoạn A_1B_1 theo tỷ số $-\dfrac{AA_1}{BB_1}$, tức là:

$$\frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{AA_1}{BB_1}.$$

Bước 5: Ta đi chứng minh rằng MA + MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M≡N. Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1}$$



$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2$, B, M_0 thẳng hàng

Từ đó: $MA + MB = MA_2 + MB \geq A_2B = M_0A + M_0B$.

Vậy $(MA + MB)_{Min} = M_0A + M_0B$, đạt được khi $M \equiv M_0$.

Bài tập 24.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

khi đó, M ∈ (d) có M(t; t; 9 − t).

Ta có: $MA + MB = \sqrt{(t-9)^2 + t^2 + t^2} + \sqrt{(t-12)^2 + (t+6)^2 + (12-t)^2}$

$$= \sqrt{3t^2 - 18t + 81} + \sqrt{3t^2 - 36t + 324}$$

$$= \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-3)^2 + 18} + \sqrt{(t-6)^2 + 72}\right). \qquad (1)$$

Xét các điểm $A_0(3; 3\sqrt{2}; 0)$, $B_0(6; -6\sqrt{2}; 0)$ và $I_0(t; 0; 0)$, khi đó (1) được viết lại dưới dạng: $MA + MB = \sqrt{3}(A_0I_0 + B_0I_0)$

Từ đó MA + MB nhỏ nhất

$\Leftrightarrow A_0I_0 + B_0I_0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_0, B_0, I_0$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0I_0} \,//\, \overrightarrow{B_0I_0} \Leftrightarrow \frac{t-3}{t-6} = \frac{-3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow M(4; 4; 5).$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = \sqrt{57} + \sqrt{228}$, đạt được tại M(4; 4; 5).

✍ *Lời giải tự luận 2*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

khi đó, (d) có vtcp $\vec{a}(1; 1; -1)$.

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc góc của A lên (d).

  Điểm $A_1 \in (d)$, suy ra $A_1(t; t; 9 - t)$ và $\overrightarrow{AA_1}(t - 9; t; -t)$.

  Vì $\overrightarrow{AA_1} \perp (d)$ nên: $\overrightarrow{AA_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 9) + t + t = 0 \Leftrightarrow t = 3$

  $$\Rightarrow A_1(3; 3; 6),\ \overrightarrow{AA_1}(-6; 3; -3) \text{ và } AA_1 = 3\sqrt{6}.$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d).

  Điểm $B_1 \in (d)$, suy ra

  $$B_1(t; t; 9 - t) \text{ và } \overrightarrow{BB_1}(t - 12; t + 6; 12 - t).$$

  Vì $\overrightarrow{BB_1} \perp (d)$ nên:

  $$\overrightarrow{BB_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow t - 12 + t + 6 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

  $$\Rightarrow B_1(6; 6; 3),\ \overrightarrow{BB_1}(-6; 12; 6) \text{ và } BB_1 = 6\sqrt{6}.$$

- Gọi $M_0 \in (d)$ là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\frac{AA_1}{BB_1} = -\frac{1}{2}$

  $$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{M_0A_1} = \overrightarrow{M_0B_1} \Leftrightarrow M_0(4; 4; 5).$$

Ta đi chứng minh rằng MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_0$.

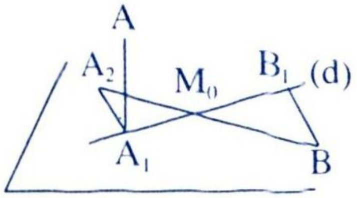
Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2, B, M_0$ thẳng hàng

Từ đó: $MA + MB = MA_2 + MB$

$$\geq A_2B = M_0A + M_0B = 4\sqrt{2}.$$



Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được khi

$M \equiv M_0(4; 4; 5)$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Ta có:

$$|MA - MB| = \left|\sqrt{(t-9)^2 + t^2 + t^2} - \sqrt{(t-12)^2 + (t+6)^2 + (12-t)^2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{3t^2 - 18t + 81} - \sqrt{3t^2 - 36t + 324}\right|$$

$$= \sqrt{3}\left|\sqrt{(t-3)^2 + 18} - \sqrt{(t-6)^2 + 72}\right|. \qquad (2)$$

Xét các điểm $A_2(3; 3\sqrt{2}; 0)$, $B_2(6; 6\sqrt{2}; 0)$ và $I_2(t; 0; 0)$, khi đó (2) được viết lại dưới dạng:

$$|MA - MB| = \sqrt{3}\,|A_2I_2 + B_2I_2|$$

Từ đó $|MA - MB|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow |A_2I_2 - B_2I|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_2, B_2, I_2$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_2I_2} \,//\, \overrightarrow{B_2I_2} \Leftrightarrow \frac{t-3}{t-6} = \frac{-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(0; 0; 9).$$

Vậy $|MA - MB|_{Max} = 9$, đạt được tại $M(0; 0; 9)$.

Chú ý: Để mở rộng cách 1 để sử dụng cho yêu cầu $|MA - MB|$ lớn nhất, ta lựa chọn ba điểm A_2, B_2, I_2 thuộc mặt phẳng Oxy và A_0, B_0 ở về một phía của trục x'Ox.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta có:

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d), ta được:

  $A_1(3; 3; 6)$, $\overrightarrow{AA_1}(-6; 3; -3)$ và $AA_1 = 3\sqrt{6}$.

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d), ta được:

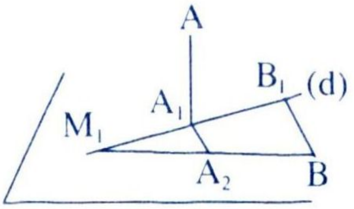
  $B_1(6; 6; 3)$, $\overrightarrow{BB_1}(-6; 12; 6)$ và $BB_1 = 6\sqrt{6}$.

- Gọi $M_1 \in (d)$ là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{1}{2}$

  $$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{M_1A_1} = \overrightarrow{M_1B_1} \Leftrightarrow M_1(0; 0; 9).$$

Ta đi chứng minh rằng $|MA - MB|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_1$.

Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B cùng phía đối với (d) và thoả mãn:



$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_1A_1}}{\overrightarrow{M_1B_1}} = \frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2, B, M_1$ thẳng hàng

Từ đó: $|MA - MB| = |MA_2 - MB| \le A_2B = |M_1A - M_1B| = 9$.

Vậy $|MA - MB|_{Max} = 9$, đạt được tại $M_1(0; 0; 9)$.

Bài tập 25.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Vì $M \in (d)$ nên $M(t; t; a - t)$.

Khi đó ta có:

$$MA + MB = \sqrt{(t-a)^2 + t^2 + (-t)^2} + \sqrt{(t - \frac{4a}{3})^2 + (t + \frac{2a}{3})^2 + (\frac{4a}{3} - t)^2}$$

$$= \sqrt{3t^2 - 2at + a^2} + \sqrt{3t^2 - 4at + 4a^2}$$

$$= \sqrt{3}\,[\sqrt{\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} + \sqrt{\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}}\,]$$

Xét các điểm $A_1(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0)$, $B_1(\frac{2a}{3}; -\frac{a\sqrt{8}}{3}; 0)$ và $M_1(t; 0; 0)$.

Khi đó: $MA + MB = \sqrt{3}\,(M_1A_1 + M_1B_1)$.

Vì M_1 chạy trên trục x'Ox và A_1, B_1 nằm về hai phía của x'Ox nên

$$(MA + MB)_{min} \Leftrightarrow (M_1A_1 + M_1B_1)_{min} \Leftrightarrow \{M_1\} = (A_1B_1) \cap x'Ox$$

$$\Leftrightarrow M_1(\frac{4a}{9}; 0; 0) \Rightarrow M(\frac{4a}{9}; \frac{4a}{9}; \frac{5a}{9})$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Tương tự câu a) ta có:

$$|MA - MB| = \sqrt{3}\,[\sqrt{\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} - \sqrt{\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}}\,]$$

Xét các điểm $A_2(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0)$, $B_2(\frac{2a}{3}; \frac{a\sqrt{8}}{3}; 0)$ và $M_2(t; 0; 0)$.

Khi đó: $|MA - MB| = \sqrt{3}\,|M_2A_2 - M_2B_2|$.

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$|MA - MB|_{max} \Leftrightarrow |M_2A_2 - M_2B_2|_{max} \Leftrightarrow \{M_2\} = (A_2B_2) \cap Ox$

$\Leftrightarrow M(0; 0; a)$.

Bài tập 26. Giả sử C(x, y, z) thuộc (S) sao cho ΔABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C \in (S) \\ CA = CB = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\frac{4}{3})^2 + (y+\frac{2}{3})^2 + (z+\frac{7}{3})^2 = \frac{8}{3} \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow C(2; -2; -3).$$

Vậy, tồn tại duy nhất điểm C(2, – 2, – 3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 27.

a. Ta có: $AB = BC = CA = \sqrt{18}$, $SA = SB = SC = 3$

$\Rightarrow$ ΔSAB, SBC, SCA là các tam giác vuông cân tại S.

b. Gọi I là trung điểm AB, suy ra $I(\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2})$.

Từ a) với D đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB, suy ra I là trung điểm của CD, do đó D(6, 4, – 5).

c. Với M(x, y, z) thuộc mặt cầu tâm D, bán kính $R = \sqrt{18}$, ta được:

$(x-6)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 18$. (1)

Ta có:

$MC^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$, $MA^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$,

$MB^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2$,

$\overset{(1)}{\Rightarrow} MA^2 + MB^2 = MC^2$

Do đó, tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB và MC là một tam giác vuông.

Bài tập 28. Mặt cầu (S), có tâm O(0, 0, 0) và bán kính $R = 1$.

a. Điểm $A(1, 0, 0)$, suy ra $P_{A/(S)} = 0 \Leftrightarrow$ A nằm trên mặt cầu.

Khi đó:

- $MA_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv A$.
- $MA_{Max} = 2R$, đạt được khi $M \equiv M_1(-1, 0, 0)$ là điểm đối xứng với A qua tâm O.

b. Điểm $A(1, 1, 0)$, suy ra

$P_{A/(S)} > 0 \Leftrightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu.

Phương trình đường thẳng (AO) cho bởi:

$$(AO): \begin{cases} \text{qua } O(0,0,0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{OA}(1,1,0) \end{cases} \Leftrightarrow (AO): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Giả sử $(AO) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$, thay phương trình của (AO) vào phương trình của (S), ta được:

$$t^2 + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \text{ và } M_1A = \sqrt{2} - 1 \\ M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \text{ và } M_2A = \sqrt{2} + 1 \end{array}\right.$$

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $MA_{Min} = \text{Min}\{M_1A, M_2A\} = \sqrt{2} - 1$, đạt được khi $M \equiv M_1$.
- $MA_{Max} = \text{Max}\{M_1A, M_2A\} = \sqrt{2} + 1$, đạt được khi $M \equiv M_2$.

Chú ý

1. Như vậy " *Để tìm điểm M thuộc mặt cầu sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất với điểm A cho trước* " ta thực hiện như sau:

   Trước hết ta đi xác định $P_{A/(S)}$, khi đó ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $P_{A/(S)} = 0$, khi đó:

- $MA_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv A$.
- $MA_{Max} = 2R$, đạt được khi $M \equiv M_1$ là điểm đối xứng với A qua tâm I của mặt cầu (S).

Khả năng 2: Nếu $P_{A/(S)} \neq 0$, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (AI).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (AI) và (S), từ đó suy ra M_1A và M_2A.

Bước 3: Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $MA_{Min} = Min\{M_1A, M_2A\}$.
- $MA_{Max} = Max\{M_1A, M_2A\}$.

2. Với yêu cầu " *Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất* ", ta thực hiện như sau:

- Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
- Xác định d = d(I, (P)).

Khi đó ta xét ba khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu d > R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (d) và (S)

$$\Rightarrow d_1 = d(M_1, (P)) \text{ và } d_2 = d(M_2, (P)).$$

Bước 3: Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Min} = Min\{d_1, d_2\}$.
- $d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\}$.

Khả năng 2: Nếu d = R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm H, H_1 (giả sử H là tiếp điểm) của (d) và (P), khi đó với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv H$.
- $d(M, (P))_{Max} = 2R$, đạt được khi $M \equiv H_1$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

Lưu ý: cũng có thể áp dụng phương pháp ở khả năng 1.

Khả năng 3. Nếu IH < R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (P))_{Min} = 0$, đạt được khi:

$$M \in (C) = (S) \cap (P).$$

Bước 2: Lập phương trình tham số đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

Bước 3: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (d) và (S)

$$\Rightarrow d_1 = d(M_1, (P)) \text{ và } d_2 = d(M_2, (P)).$$

Bước 4: Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

$$d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\}.$$

Bài tập 29. Mặt cầu (S) có tâm I(1, 0, − 1) và bán kính R = 2.

Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi:

$$d = \frac{|2-1+6|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{7}{3} > R.$$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow M_1(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) \text{ và } M_2(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$$

từ đó: $d_1 = d(M_1, (P)) = \frac{13}{3}$ và $d_2 = d(M_2, (P)) = \frac{1}{3}$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = \frac{13}{3}$, đạt được khi $M \equiv M_1$.
- $d(M, (P))_{Min} = Min\{d_1, d_2\} = \frac{1}{3}$, đạt được khi $M \equiv M_2$.

Bài tập 30. Mặt cầu (S) có tâm I(1, 1, 1) và bán kính R = 2.

a. Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi: $d = \frac{|3-4-9|}{\sqrt{9+16}} = 2 = R$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm\frac{2}{5} \Rightarrow M_1(\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}, 1) \text{ và } M_2(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}, 1)$$

từ đó: $d_1 = d(M_1, (P)) = 0$ và $d_2 = d(M_2, (P)) = 4$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = 4$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
- $d(M, (P))_{Min} = Min\{d_1, d_2\} = 0$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

b. Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi: $d = \frac{|2-2-1-2|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 < R$

- Xác định M để MH_{Min}.

Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (P))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \in (C) = (S) \cap (P)$, có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Xác định M để MH_{Max}.

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua I} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$. Bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow M_1(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ và } M_2(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3})$$

từ đó: $d_1 = d(M_1, (P)) = 1$ và $d_2 = d(M_2, (P)) = 3$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

$d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = 3$, đạt được khi $M \equiv M_2$.

Bài tập 31. Mặt cầu (S) có tâm $I(1, 2, -1)$ và bán kính $R = 1$.

a. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta được $\vec{a}(-1, 1, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(d) \Rightarrow H \in (d)$ do đó:

$H(1 - t, t, -1) \Rightarrow \overrightarrow{IH}(-t, t - 2, 0)$.

Vì

$$\overrightarrow{IH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow -t(-1) + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow H(0, 1, -1),\ \overrightarrow{IH}(-1, -1, 0) \text{ và } IH = \sqrt{2} > 1 = R.$$

Phương trình đường thẳng (IH) được cho bởi:

$$(IH): \begin{cases} \text{qua } H \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH} \end{cases} \Leftrightarrow (IH): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t,\ t \in \mathbf{R}. \\ z = -1 \end{cases}$$

Giả sử $(IH) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow M_1(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1) \text{ và } M_2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$$

từ đó:

$$M_1H = \sqrt{2} + 1 \text{ và } M_2H = \sqrt{2} - 1.$$

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:

- $MH_{Min} = Min\{M_1H, M_2H\} = \sqrt{2} - 1$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
- $MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\} = \sqrt{2} + 1$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

b. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta được $\vec{a}(0, -1, 1)$.

Gọi $H(x_0, y_0, z_0)$ là hình chiếu vuông góc của I lên (d), ta có:

$$\begin{cases} H \in (d) \\ IH \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 - 3 = 0 \\ y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ (x_0 - 1).0 + (y_0 - 2).(-1) + (z_0 + 1).1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2 ; 2 ; -1) \text{ và } \overrightarrow{IH}(1; 0; 0) \text{ và } IH = 1 = R.$$

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:

- $MH_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv H$.
- $MH_{Max} = 2$, đạt được khi $M \equiv M_0(0, 2, -1)$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

c. Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta được $\vec{a}(1, -1, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d) $\Rightarrow H \in (d)$ do đó:

$$H(1 + t ; 2 - t ; -\frac{1}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{IH}(t ; -t ; \frac{1}{2}).$$

Vì

$$\overrightarrow{IH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow t.1 + (-t).(-1) + \frac{1}{2}.0 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow H(1;\ 2;\ -\frac{1}{2}),\ \ \overrightarrow{IH}(0;\ 0;\ \frac{1}{2}) \text{ và } IH = \frac{1}{2} < 1 = R.$$

- Xác định M để MH_{Min}.

Giả sử $(d) \cap (S) = \{A, B\}$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} \Rightarrow A(1 + \sqrt{\frac{3}{8}}, 2 - \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}) \text{ và } B(1 - \sqrt{\frac{3}{8}}, 2 + \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}).$$

Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

- Xác định M để MH_{Max}.

Phương trình đường thẳng (IH) được cho bởi:

$$(IH): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IH} \end{cases} \Leftrightarrow (IH): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Giả sử $(IH) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (IH) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow M_1(1, 2, 0) \text{ và } M_2(1, 2, -2)$$

từ đó: $M_1H = \frac{1}{2}$ và $M_2H = \frac{3}{2}$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

$$MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\} = \frac{3}{2}, \text{ đạt được khi } M \equiv M_2.$$

Chú ý: Như vậy " *Để tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất* " ta thực hiện như sau:

- Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), xác định toạ độ $H \Rightarrow IH$.

Khi đó ta xét ba khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu IH > R, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (IH).

Bước 2: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (IH) và (S) $\Rightarrow M_1H, M_2H$.

Bước 3: Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:

- $MH_{Min} = Min\{M_1H, M_2H\}$.
- $MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\}$.

Khả năng 2. Nếu $IH = R$, khi đó với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d)) = MH$ và:

- $MH_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv H$.
- $MH_{Max} = 2R$, đạt được khi $M \equiv H_1$ là điểm đối xứng với điểm H qua I.

Khả năng 3. Nếu $IH < R$, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với điểm $M \in (S)$ ta có $d(M, (d))_{Min} = 0$, đạt được khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$ với $\{A, B\} = (d) \cap (S)$.

Bước 2: Lập phương trình tham số đường thẳng (IH).

Bước 3: Xác định toạ độ giao điểm M_1, M_2 của (IH) và (S) $\Rightarrow M_1H, M_2H$.

Bước 4: Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có: $MH_{Max} = Max\{M_1H, M_2H\}$.

Bài tập 32. Mặt cầu (S) có tâm I(1, 1, 1) và bán kính R = 2.

Khoảng cách từ I tới (P) được cho bởi: $d = \dfrac{|1+2+2+4|}{\sqrt{1+4+4}} = 3 > R$

Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn: (d): $\begin{cases} \text{qua } I \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow$ (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

Giả sử $(d) \cap (S) = \{M_1, M_2\}$, bằng cách thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình của (S), ta được:

$$t_{1,2} = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow M_1(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}) \text{ và } M_2(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

từ đó: $d_1 = d(M_1, (P)) = 5$ và $d_2 = d(M_2, (P)) = 1$.

Khi đó, với điểm $M \in (S)$ ta có:

- $d(M, (P))_{Min} = Min\{d_1, d_2\} = 1$, đạt được khi $M \equiv M_2$.
- $d(M, (P))_{Max} = Max\{d_1, d_2\} = 5$, đạt được khi $M \equiv M_1$.

Bài tập 33.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có :

$\vec{a}_1(-2; 1; 3)$, $\vec{a}_2(1; -1; 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|(-2).1 + 1.(-1) + 3.3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{154}}.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\vec{a}_1(2; 1; 3)$, $\vec{a}_2(1; 2; 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|2.1 + 1.2 + 3.3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{13}{14}.$$

Bài tập 34. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

- Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có $\vec{a}(1; -1; 3)$.
- Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}(1; 1; 1)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|.|\vec{n}|} = \frac{|1.1 + 1.(-1) + 1.3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Bài tập 35. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ theo thứ tự là vtpt của (P), (Q), ta có :

$\vec{n}_1(1; 1; 2)$, $\vec{n}_2(2; 1; 1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|1.2 + 1.1 + 2.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{6}.$$

Bài tập 36.

a. Từ giả thiết:

$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{DA}(-a; 0; d)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1}(d; 0; a)$ và $\overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{DB}(0; -a; d) \Rightarrow \overrightarrow{OB_1}(0; d; a)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) chứa các đường thẳng OA_1, OB_1, ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OA_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{OB_1} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 0 & a \\ d & a \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & d \\ a & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(-ad;\ -ad;\ d^2) \text{ chọn } \vec{n}(a;\ a;\ -d).$$

Vậy phương trình (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(a;a;-d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): ax + ay - dz = 0.$$

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng CD bởi $\vec{n}\ //\ \overrightarrow{CD}(-a;\ -a;\ d)$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\cos\widehat{A_1OB_1} = \frac{|\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OA_1}|.|\overrightarrow{OB_1}|} = \frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+d^2}} = \frac{a^2}{a^2+d^2}.$$

$$\text{Vậy: } \widehat{A_1OB_1} = 45^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{A_1OB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d = a\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Bài tập 37.

a. Phương trình mặt phẳng (HIK)

$$(HIK): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{1}{2};0;0) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{HI}(\frac{1}{2};1;\frac{1}{3}) \text{ và } \overrightarrow{KI}(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (HIK): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{1}{2};0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(\frac{1}{6};\frac{1}{6};-\frac{3}{4}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$(HIK): $2x + 2y - 9z - 1 = 0$.

- Gọi (d) là giao tuyến của (HIK) với mặt phẳng $x + z = 0$, (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} 2x + 2y - 9z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

- Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}2 & -9\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-9 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right) = \vec{a}\,(2; -11; -2).$$

Vậy, chọn $A(-1; 6; 1) \in (d)$, ta được:

$$(d): \begin{cases}\text{qua } A(-1;6;1)\\ \text{vtcp } \vec{a}(2;-11;-2)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{-11} = \frac{z-1}{-2}.$$

b. *Đáp án trắc nghiệm B.*

Mặt phẳng (HIK) có vtpt $\vec{n}\,(2; 2; -9)$

Mặt phẳng (Oxy) có vtpt $\vec{m}\,(0; 0; 1)$.

Vậy cosin của góc phẳng α tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy, được xác định bởi công thức: $\cos\alpha = \dfrac{|0+0-9|}{\sqrt{4+4+81}.\sqrt{0+0+1}} = \dfrac{9}{\sqrt{89}}$.

Bài tập 38.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, được:

$$\begin{cases}x = 2t - 3\\ y = t - 1\\ z = t + 3\end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình (P), ta được:

$$(2t - 3) + 2(t - 1) - (t + 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1; 0; 4).$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có $\vec{a}\,(2; 1; 1)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}\,(1; 2; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

Vậy góc giữa (d) và (P) bằng 30^0.

c. Lấy $A(-3; -1; 3) \in (d)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$(Q): \begin{cases}\text{qua } A(-3;-1;3)\\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2;1;1)\ \&\ \vec{n}(1;2;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases}\text{qua } A(-3;-1;3)\\ \text{vtpt } \vec{m}(-3;3;3)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (Q): x - y - z - 5 = 0$

Khi đó, hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) $\Rightarrow (d_1) = (P) \cap (Q)$, có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

d. Gọi $\vec{b}$ là vtcp của đường thẳng (Δ). Từ giả thiết:

$$\begin{cases} \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{b}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{b}(-3;\ 3;\ 3).$$

Vậy đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b}(-3;3;3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Chú ý: Có thể lập luận như sau:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b} \,//\, \vec{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b}(-1;1;1) \end{cases}.$$

Bài tập 39.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(6;\ -4;\ -5).$$

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), ta có $\vec{n}(3;\ 1;\ -1)$.

Gọi α góc giữa (d) và (P), khi đó $\sin\alpha$ được xác định bởi công thức:

$$\sin\alpha = \frac{|3.6 + 1.(-4) - 1.(-5)|}{\sqrt{(3^2 + 1^2 + (-1)^2)(6^2 + (-4)^2 + (-5)^2)}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}.$$

b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

- (Q) chứa đường thẳng (d) $\Rightarrow$ (Q) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi trục (d), có dạng:

  $$(Q): A(x + 4y - 2z + 7) + B(3x + 7y - 2z) = 0$$

  $$\Leftrightarrow (Q): (A + 3B)x + (4A + 7B)y - 2(A + B)z + 7A = 0. \quad (1)$$

khi đó (Q) có vtpt $\vec{n}_1(A + 3B, 4A + 7B, -2(B + A))$.

- Để (Q) ⊥ (P) điều kiện là:

$$\vec{n}.\vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow 3(A + 3B) + 4A + 7B + 2(B + A) = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{A}{2}.$$

Thay $B = -\frac{A}{2}$ vào (1), được (Q): $-x + y - 2z + 7 = 0$.

Hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), có dạng:

$$(d_1): \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ -x + y - 2z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 40.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

Bài tập 41.

a. Gọi E là trung điểm BC, suy ra

$E(-1; 3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AE}(-2; 1; 5)$.

Phương trình trung tuyến AE được cho bởi:

$$(AE): \begin{cases} \text{qua } A(1; 2; -1) \\ \text{vtcp } \vec{a_1}(-2; 1; 5) \end{cases} \Leftrightarrow (AE): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{5}.$$

b. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Phương trình cạnh BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(2; -1; 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BC}(-6; 8; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 4t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc H của A lên BC ⇒ H ∈ (BC), khi đó:

$H(2 - 3t; -1 + 4t; 3 + t)$ và $\overrightarrow{AH}(1 - 3t; -3 + 4t; 4 + t)$.

Vì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ nên:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -3.(1 - 3t) + 4.(-3 + 4t) + 1.(4 + t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{26}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}\left(-\frac{7}{26}; -\frac{34}{26}; \frac{115}{26}\right) \text{ chọn } \vec{a_2}(-7; 34; 115)$$

Khi đó, phương trình đường cao (AH) được cho bởi:

$$(AH): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 2\ -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{a_2}(-7;34;\ 115) \end{cases} \Leftrightarrow (AH):\ \frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{34} = \frac{z+1}{115}.$$

Cách 2: Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 2;\ -1) \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AB}(1;\ -3;\ 4) \text{ và } \overrightarrow{AC}(-5;\ 5;\ 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(1;\ 2;\ -1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(34;\ 26;\ 13) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC):\ 34x + 26y + 13z - 73 = 0.$$

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1;2;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(-6;7;2) \end{cases} \Leftrightarrow (P):\ -6x + 7y + 2z - 6 = 0.$$

Khi đó, đường cao (AH) = (ABC) ∩ (P) có phương trình được cho bởi:

$$(AH): \begin{cases} 34x + 26y + 13z - 73 = 0 \\ -6x + 7y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

c. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Gọi I là chân đường phân giác trong góc B lên cạnh AC, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IC}} = -\frac{BA}{BC} = -\frac{1}{2} = k \Rightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_C}{1-k} = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{y_A - ky_C}{1-k} = \dfrac{11}{3} \\ z = \dfrac{z_A - kz_C}{1-k} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI}\left(-\frac{8}{3};\ \frac{14}{3};\ -2\right) \text{ chọn } \vec{a}\,(4;\ -7;\ 3).$$

Phương trình đường phân giác (BI) được xác định bởi:

$$(BI): \begin{cases} \text{qua } B(2;-1;3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(4;-7;3) \end{cases} \Leftrightarrow (BI):\ \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}.$$

Cách 2:

Phân tích: Trên BC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

- $BA = BC_1$ (1)
- C, C_1 cùng phía với B $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC_1} = k\overrightarrow{BC} \\ k > 0 \end{cases}$ (2)

Suy ra ΔABC_1 cân tại B, do đó đường phân giác trong của góc B của ΔABC cắt AC_1 tại M là trung điểm của AC_1.

Vậy, đường phân giác trong của góc B chính là đường thẳng (BM).

Dựng. Điểm $C_1 \in (BC)$, có toạ độ $C_1(2-3t; 4t-1; 3+t) \Rightarrow \overrightarrow{BC_1}(-3t; 4t; t)$.

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow t > 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{26t^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad (l) \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow C_1(-1; 3; 4) \Rightarrow M(0; \frac{5}{2}; \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}(-2; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}) \text{ chọn } \vec{a}(4; -7; 3).$$

Phương trình đường phân giác (BM) được xác định bởi:

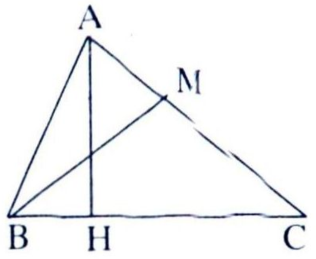
$$(BM): \begin{cases} \text{qua } B(2,-1,3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(4,-7,3) \end{cases} \Leftrightarrow (BM): \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}.$$

Chú ý. Nếu chỉ bài toán yêu cầu tính độ dài đường phân giác trong của một đỉnh bất kỳ ta có thể giải bằng việc sử dụng định lý hàm số cosin.

Bài tập 42.

- Chuyển phương trình (AH), (BM) về dạng tham số, ta được:

$$(AH): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = 3-2t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \text{ và } (BM): \begin{cases} x = 1+u \\ y = 4-2u \\ z = 3+u \end{cases}, u \in \mathbf{R}.$$



Khi đó:

$A(2+t; 3+t; 3-2t)$ và $B(1+u; 4-2u; 3+u)$.

- Xác định toạ độ đỉnh B

Ta có:

$\overrightarrow{CB}(-2+u; 2-2u; u)$,

$BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 1.(-2+u) + 1.(2-2u) - 2.u = 0$

$\Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow B(1; 4; 3)$.

- Xác định toạ độ đỉnh A

Ta có:

$\overrightarrow{BA}(1+t; -1+t; -2t)$, $\overrightarrow{BM}(1; -2; 1)$, $\overrightarrow{BC}(2; -2; 0)$.

Vì BM là đường phân giác trong của góc B, do đó:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BM}|} = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BM}|.|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1.(1+t)-2.(-1+t)+1.(-2t)}{\sqrt{(1+t)^2+(-1+t)^2+(-2t)^2}} = \frac{1.2-2.(-2)+1.0}{\sqrt{4+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right..$$

- Với $t = 0 \Rightarrow A(2; 3; 3)$.

  Nhận xét rằng A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow A(2; 3; 3)$ bị loại.

- Với $t = -1 \Rightarrow A(1; 2; 5)$ loại vì khi đó A, B, C thẳng hàng.

Nhận xét rằng A, B, C không thẳng hàng $\Rightarrow A(1; 2; 5)$ chấp nhận được.

Khi đó, ta có được: $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CA = 2\sqrt{2}$ (ΔABC đều).

Bài tập 43.

a. Kiểm nghiệm rằng A không thuộc hai trung tuyến trên, ta giả sử:

$$(BN): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ và } (CP): \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}$$

- Chuyển phương trình (BN) và (CP) về dạng tham số, ta được:

$$(BN): \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = 2t+6 \\ z = t+1 \end{cases}, t \in \mathbf{R} \text{ và } (CP): \begin{cases} x = u+4 \\ y = -4u+2 \\ z = u+2 \end{cases}, u \in \mathbf{R}.$$

Khi đó, toạ độ $B(-2t + 3; 2t + 6; t + 1)$, $C(u + 4; -4u + 2; u + 2)$ và trọng tâm $\{G\} = (BN) \cap (CP)$ có tọa độ $G(3, 6, 1)$, suy ra:

$$\overrightarrow{GA}(-2; -4; 4), \overrightarrow{GB}(-2t; 2t; t) \text{ và } \overrightarrow{GC}(u + 1; -4u - 4; u + 1).$$

- Xét ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow (-2 - 2t + u + 1; -4 + 2t - 4u - 4; 4 + t + u + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ u = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(7; 2; -1) \\ C(1; 14; -1) \end{cases}.$$

Vậy, phương trình chính tắc các cạnh của ΔABC được xác định như sau:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1; 2; 5) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(6; 0; -6) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{-1},$$

tương tự $(AC): \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-1}$ và $(BC): \frac{x-7}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$,

b. Ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1: Gọi I là chân đường phân giác trong góc A lên cạnh BC, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{\sqrt{10}}{5} = k \Rightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{x_B - kx_C}{1-k} = \dfrac{35+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5} \\ y = \dfrac{y_B - ky_C}{1-k} = \dfrac{10+14\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5} \\ z = \dfrac{z_B - kz_C}{1-k} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(\frac{30}{\sqrt{10}+5}; \frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{10}+5}; -6\right) \text{ chọn } \vec{a}\,(\sqrt{5}; -2\sqrt{2}; \sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Phương trình đường phân giác (AI) được xác định bởi:

$$(AI): \begin{cases} \text{qua } A(1; 2; 5) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AI}(\sqrt{5}; -2\sqrt{2}; \sqrt{2}-\sqrt{5}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AI): \frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y-2}{-2\sqrt{2}} = \frac{z-5}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

Cách 2: *Phân tích*: Trên AC lấy một điểm C_1 thoả mãn:

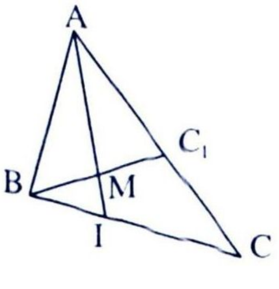
- $AB = AC_1$ (1)
- C, C_1 cùng phía với A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC} \\ k > 0 \end{cases}$ (2)

Suy ra ΔABC_1 cân tại A, do đó đường phân giác trong của góc A của ΔABC cắt BC_1 tại M là trung điểm của BC_1.

Vậy, đường phân giác trong của góc A chính là đường thẳng (AM).

Dựng: Điểm $C_1 \in (AC)$, có toạ độ $C_1(1; 2v+2; -v+5) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(0; 2v; -v)$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 12k \\ -v = -6k \Rightarrow v < 0. \\ k > 0 \end{cases}$$



$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4v^2 + v^2} = \sqrt{36+36} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{6\sqrt{10}}{5} \quad (l) \\ v = -\dfrac{6\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C_1(1;\ \frac{10-12\sqrt{10}}{5};\ \frac{25+6\sqrt{10}}{5})$$

$$\Rightarrow M(4;\ \frac{10-6\sqrt{10}}{5};\ \frac{10+3\sqrt{10}}{5})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}(3;\ -\frac{6\sqrt{10}}{5};\ \frac{3\sqrt{10}-15}{5})\text{ chọn }\vec{a}(\sqrt{5};\ -2\sqrt{2};\ \sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Phương trình đường phân giác (AM) được xác định bởi:

$$(AM): \begin{cases}\text{qua } A(1;\ 2;\ 5)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM}(\sqrt{5};\ -2\sqrt{2};\ \sqrt{2}-\sqrt{5})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AM): \frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y-2}{-2\sqrt{2}} = \frac{z-5}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

Bài tập 44.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Mặt phẳng (P) có một cặp vtcp : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}(-1;\ -2;\ -1)\\ \overrightarrow{AC}(2;\ 1;\ -2)\end{cases}$.

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (P), khi đó:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right) = \vec{n}(5;\ -4;\ 3).$$

Khi đó, phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) được cho bởi :

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A(0;\ 0;\ 1)\\ \text{vtpt } \vec{n}(5;\ -4;\ 3)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $5x - 4y + 3z - 3 = 0$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $G(x_G, y_G, z_G)$ là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$G: \begin{cases}x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}\\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\end{cases} \Leftrightarrow G: \begin{cases}x_G = 1/3\\ y_G = -1/3\\ z_G = 0\end{cases} \Leftrightarrow G(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ 0).$$

c. Đường thẳng (d) đi qua trọng tâm G và vuông góc với (P), được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } G(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(5; -4; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

d. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Phương trình (BC) được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(-1; -2; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BC}(3; 3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = -1 + 3t & (1) \\ y = -2 + 3t & (2) \\ z = -t & (3) \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Vì H ∈ BC nên:

$H(-1 + 3t; -2 + 3t; -t)$ và $\overrightarrow{AH}(-1 + 3t; -2 + 3t; -t - 1)$.

Vì $AH \perp BC$ nên: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(-1 + 3t) + 3(-2 + 3t) - (-t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 19t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{19} \Rightarrow H(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19})$.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Phương trình (BC) được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(-1; -2; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BC}(3; 3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = -1 + 3t & (1) \\ y = -2 + 3t & (2) \\ z = -t & (3) \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC.

Gọi (R) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A(0; 0; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(3; 3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 3x + 3y - z + 1 = 0 \qquad (4)$$

Điểm $\{H\} = (BC) \cap (R)$, vậy thay (1), (2), (3) vào (4), ta được:

$3(-1 + 3t) + 3(-2 + 3t) - (-t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{19} \Rightarrow H(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19})$.

e. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi d là khoảng cách từ O đến (ABC), khi đó:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.d = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AH.BC.d \qquad (5)$$

trong đó:

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \qquad (6)$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{5}{19}\right)^2 + \left(-\frac{14}{19}\right)^2 + \left(-\frac{8}{19} - 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{38}}{19} \qquad (7)$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19} \qquad (8)$$

Thay (6), (7), (8) vào (5), ta được: $V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{5\sqrt{38}}{19}.\sqrt{19}.\frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{2}$ (đvtt).

Bài tập 45. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Phương trình tổng quát của (ABC) cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(2;3;1) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{AB}(2;-2;-3) \text{ và } \overrightarrow{AC}(4;0;6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{qua } A(2,3,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-12,-24,8) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (ABC): $3x + 6y - 2z - 22 = 0$.

Độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D chính là d(D, (ABC)), ta có:

$$d = d(D, (ABC)) = \frac{|3.(-5) + 6.(-4) - 2.8 - 22|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{77}{7} = 11.$$

Bài tập 46.

a. Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (ABC), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}(-3;4;1) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}(-2;2;4) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(14;\ 10;\ 2),$$

chọn $\vec{n}(7;\ 5;\ 1)$.

Mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(4;1;4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(7;5;1) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): 7x + 5y + z - 37 = 0 \qquad (1)$$

Gọi (d) là đường thẳng qua D và vuông góc với (ABC), khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } D(1;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7;5;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 7t & (2) \\ y = 1 + 5t & (3) \\ z = 1 + t & (4) \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

Hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) chính là giao điểm

$$\{D_1\} = (d) \cap (ABC).$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$7(1 + 7t) + 5(1 + 5t) + 1 + t - 37 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{25} \Rightarrow D_1(\frac{81}{25}; \frac{65}{25}; \frac{33}{25}).$$

Tính thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}.48 = 8$ (đvtt).

b. Thiết lập phương trình tham số của (AC) và (BD), ta có

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(4;1;4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AC}(-3;4;1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

$$\text{và } (BD): \begin{cases} \text{qua } B(3;3;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BD}(2;2;0) \end{cases} \Leftrightarrow (BD): \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 3 + 2u \\ z = 1 \end{cases}, u \in \mathbf{R}$$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AC và BD ($M \in (AC)$; $N \in (BD)$). Khi đó, toạ độ của M, N theo thứ tự thoả mãn phương trình tham số của (AC) và (BD), tức là: $M(4 - 3t; 1 + 4t; 4 + t)$; $N(3 + 2u; 3 + 2u; 1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}(2u + 3t - 1; 2u - 4t + 2; -3 - t).$$

Từ điều kiện: $\begin{cases} MN \perp (AC) \\ MN \perp (BD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3(2u + 3t - 1) + 4(2u - 4t + 2 + (-3 - t) = 0 \\ 2(2u + 3t - 1) + 2(2u - 4t + 2 + 0.(-3 - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{17} \\ u = -\frac{3}{17} \end{cases}.$$

Thay t, u vào toạ độ M, N ta được toạ độ

$$M(\frac{53}{17}; \frac{37}{17}; \frac{73}{17}),\ N(\frac{45}{17}; \frac{45}{17}; 1).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) chính là phương trình (MN), được xác định bởi:

$$(MN): \begin{cases} \text{qua } N(\frac{45}{17};\frac{45}{17};1) \\ \text{vtcp } \overline{NM}(\frac{8}{17};-\frac{8}{17};\frac{56}{17}) \end{cases} \Leftrightarrow (MN): \begin{cases} x = \frac{45}{17} + v \\ y = \frac{45}{17} - v \\ z = 1 + 7v \end{cases}, v \in \mathbf{R}$$

Bài tập 47.

a. Ta có $\overrightarrow{SB}$ $(-2; 4; -7)$, $\begin{cases} x = bc.t & (2) \\ y = ca.t & (3) \\ z = c - ab.t & (4) \end{cases}$ $(6; 3; 0)$ suy ra :

$$\overrightarrow{SB}\,.\,\frac{2abc}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2} = -2.6 + 4.3 - 7.0 = 0 \Leftrightarrow SB \perp OA.$$

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Chứng minh rằng hình chiếu của cạnh SB lên (OAB) vuông góc với cạnh OA.

Gọi (d_1) là hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB), vậy $(d_1) \in (Q)$ là mặt phẳng chứa SB và vuông góc với (OAB).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (OAB), ta nhận xét rằng:

$$\begin{cases} OA \perp \vec{n} \\ OA \perp SB \end{cases} \Rightarrow OA \perp (Q) \Rightarrow OA \perp (d_1).$$

Gọi K là giao điểm của hình chiếu (d_1) với OA, suy ra:

$$\begin{cases} K \in (OA) \\ BK \perp OA \end{cases}.$$

- Phương trình (OA) được xác định bởi:

$$(OA): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtcp } \overline{OA}(6;3;0) \end{cases} \Leftrightarrow (OA): \begin{cases} x = 6t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

- Vì $K \in (OA)$, nên có toạ độ $K(6t; 3t; 0)$, từ đó $\overrightarrow{BK}$ $(6t + 2; 3t - 9; -1)$.
- Vì $BK \perp OA$ nên:

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{BK} = 0 \Leftrightarrow 6(6t + 2) + 3(3t - 9) - 1.0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow K(2; 1; 0).$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍*Lời giải tự luận*: Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SO, AB, ta có:

$$P\left(0; \frac{5}{2}; 4\right); Q\left(2; 6; \frac{1}{2}\right).$$

Giả sử phương trình mặt phẳng (KPQ) có dạng:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (4)$$

Điểm K, P, $Q \in (KPQ)$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b + d = 0 & (5) \\ \frac{5}{2}b + 4c + d = 0 & (6) \\ 2a + 6b + \frac{1}{2}c + d = 0 & (7) \end{cases}, \text{ từ } \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} (5) \\ (6) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a - 3b - 8c = 0 \quad (8) \\ \left.\begin{array}{r} (6) \\ (7) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a - 7b - 7c = 0 \quad (9) \end{array}$$

từ (8) và (9) suy ra $4b - c = 0$, chọn $b = 4$, ta được $a = -77$, $b = 4$, $c = 16$, $d = -39$.

Thay a, b, c, d vào (4), được:

$$(KPQ): 77x - 4y + 40z - 150 = 0. \qquad (11)$$

Phương trình (SB) được xác định bởi

$$(SB): \begin{cases} \text{qua } O(0,5,8) \\ \text{vtcp } \overline{OA}(-2,4,-7) \end{cases} \Leftrightarrow (SB): \begin{cases} x = -2t & (12) \\ y = 5 + 4t & (13) \\ z = 8 - 7t & (14) \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau, chính là giao điểm của (KPQ) và (SB). Thay (12), (13), (14) vào (11), ta được:

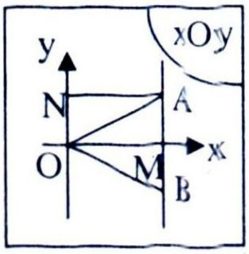
$$77(-2t) - 4(5 + 4t) + 40(8 - 7t) - 150 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow M(-\frac{2}{3}; \frac{19}{3}; \frac{17}{3}).$$

Bài tập 48.

a. Xác định toạ độ điểm A, B:

- Từ giả thiết ΔOAB đều, AB // Oy, điểm A thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng (xOy).

Suy ra:



$$x_A = x_B = OM = OA.\cos AOM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_B = y_A = ON = OA.\sin AOM = \frac{a}{2}; \quad z_A = z_B = 0.$$

Vậy, ta có $A(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0)$ và $B(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0)$.

- Điểm E là trung điểm OA, vậy $E(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; 0)$.

- Mặt phẳng (P) chứa SE và song song với Ox, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } S(0; 0; \frac{a}{3}) \\ \text{hai vtcp } \overrightarrow{SE}(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; -\frac{a}{3}) \text{ và } \overrightarrow{Ox}(1;0;0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } S(0;0;\frac{a}{3}) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0;-\frac{a}{3};-\frac{a}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 4y + 3z - a = 0.$$

b. Khoảng cách từ O đến (P) được xác định bởi:

$$d = d(O, (P)) = \frac{|-a|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{a}{5}.$$

Từ đó, suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng Ox và SE bằng $\frac{a}{5}$.

Bài tập 49.

a. Phương trình tham số của đường thẳng BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(4;0;-3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BC}(1;-1;7) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x = 4 + t & (1) \\ y = -t & (2) \\ z = -3 + 7t & (3) \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Vì H ∈ (BC), nên:

$H(4 + t; -t; -3 + 7t)$ và $\overrightarrow{AH}(5 + t; -3 - t; 7t - 5)$.

Vì $AH \perp BC$ nên:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1(5 + t) - (-3 - t) + 7(7t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{9}{17} \Rightarrow H(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}).$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (BCD), khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}(-4;6;4) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}(1;-1;7) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(23; 16; -1).$$

Do đó :

$$(BCD): \begin{cases} \text{qua } B(4;0;-3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(23;16;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): 23x + 16y - z - 95 = 0.$$

d. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Khoảng cách từ A đến (BCD) được xác định bởi:

$$h = \frac{|23(-1) + 16.3 - 2 - 95|}{\sqrt{23^2 + 16^2 + (-1)^2}} = \frac{72}{\sqrt{786}}.$$

Bài tập 50.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Từ giả thiết, ta có: D(a; b; c).

- Phương trình mặt phẳng (ABD).

Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của (ABD), khi đó:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AD} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}\end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & c\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & 0 \\ c & a\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0\end{vmatrix}\right) = \vec{n}(bc;\ ca;\ -ab).$$

Mặt phẳng (ABD) được cho bởi:

$$(ABD): \begin{cases}\text{qua } A(a;\ 0;\ 0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(bc; ca; -ab)\end{cases} \Leftrightarrow (ABD): bc(x-a) + ca.y - ab.z = 0$$

$$\Leftrightarrow (ABD): bc.x + ca.y - ab.z - abc = 0 \qquad (1)$$

- Khoảng cách từ C đến (ABD) được xác định bởi :

$$d(C, (ABD)) = \frac{|bc.0 + ca.0 - ab.c - abc|}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}} = \frac{2abc}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}}.$$

b. Gọi (d) là đường thẳng qua C và vuông góc với (ABD), khi đó:

$$(d): \begin{cases}\text{qua } C(0;0;c) \\ \text{vtcp } \vec{n}(bc;ca;-ab)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = bc.t & (2) \\ y = ca.t & (3) \\ z = c - ab.t & (4)\end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Hình chiếu vuông góc của C lên (ABD) chính là giao điểm C_1 của (d) và (ABD). Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$bc.bc.t + ca.ca.t - ab.(c - ab.t) - abc = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2abc}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}.$$

Thay $t = \dfrac{2abc}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}$ vào (2), (3), (4), ta được toạ độ hình chiếu vuông góc của C lên (ABD) là:

$$C_1\left(\frac{2a(bc)^2}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}, \frac{2b(ac)^2}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}, \frac{(bc)^2 + (ca)^2 - (ab)^2}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}.c\right).$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy), ta phải có :

$$C_1 \in (xOy) \Leftrightarrow \frac{(bc)^2 + (ca)^2 - (ab)^2}{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}.c = 0$$

$$\Leftrightarrow (bc)^2 + (ca)^2 - (ab)^2 = 0.$$

MỤC LỤC

Chủ đề 1. Hệ tọa độ trong không gian

I. Tóm tắt lý thuyết 5
II. Phương pháp giải các dạng toán liên quan và bài tập 8
Bài toán 1: Tọa độ của vectơ và của điểm 8
Bài toán 2: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng 9
Bài toán 3: Ba vectơ đồng phẳng, không đồng phẳng 12
Bài toán 4: Mở đầu về phương pháp tọa độ hóa 14
Bài toán 5: Phương trình mặt phẳng 16
Bài toán 6: Lập phương trình mặt cầu 17
III. Hướng dẫn – Giải – Đáp số 19

Chủ đề 2. Mặt phẳng

I. Tóm tắt lý thuyết 39
II. Phương pháp giải các dạng toán liên quan và bài tập 41
Bài toán 1: Phương trình mặt phẳng 41
Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng 42
Bài toán 3: Vị trí tương đối của điểm và mặt phẳng 45
Bài toán 4: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng 48
Bài toán 5: Chùm mặt phẳng và ứng dụng 49
Bài toán 6: Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu 55
Bài toán 7: Tiếp diện của mặt cầu 58
III. Hướng dẫn – Giải – Đáp số 60

Chủ đề 3. Đường thẳng

I. Tóm tắt lý thuyết 91
II. Phương pháp giải các dạng toán liên quan và bài tập. 93
Bài toán 1: Phương trình đường thẳng 93
Bài toán 2: Chuyển dạng phương trình đường thẳng 96
Bài toán 3: Lập phương trình đường thẳng 98
Bài toán 4: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng 101
Bài toán 5: Vị trí tương đối của hai đường thẳng 103
Bài toán 6: Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu 108
III. Hướng dẫn – Giải – Đáp số 116

Chủ đề 4. Các dạng toán liên quan tới điểm, đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu

I. Giới thiệu 182
II. Phương pháp giải các dạng toán liên quan và bài tập 183
Bài toán 1: Điểm và mặt phẳng 183
Bài toán 2: Điểm và đường thẳng 186
Bài toán 3: Điểm và mặt cầu 189
Bài toán 4: Góc trong không gian 191
Bài toán 5: Tam giác trong không gian 195
Bài toán 6: Khối đa diện 197
III. Hướng dẫn – Giải – Đáp số 199

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

TP. HỒ CHÍ MINH:
NS HỒNG ÂN - 18D Nguyễn Thị Minh Khai – Quận I

ĐÀ NẴNG:
CÔNG TY CP SÁCH - TBTH – 78 Bạch Đằng
THANH HÓA:
NS VĂN HÓA – 27 – 29 Đại lộ Lê Lợi
NGHỆ AN:
NS VĂN HÓA – 343 Lê Duẩn – TP. Vinh
QUẢNG BÌNH:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 03 Mẹ Suốt và 257 Trần Hưng Đạo
QUẢNG TRỊ:
CỬA HÀNG SÁCH GIÁO DỤC – 283 Trần Hưng Đạo
HUẾ:
NS HỒNG ĐỨC – 59 Trần Phú
QUẢNG NAM:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 190 Phan Chu Trinh
NS SIÊU THỊ VĂN HÓA ĐIỆN ẢNH TAM KỲ – 24 Trần Cao Vân
QUẢNG NGÃI:
NS VĂN HÓA – 204 Nguyễn Nghiêm
NS TRẦN QUỐC TUẤN – 526 Quang Trung
BÌNH ĐỊNH:
NS VĂN HÓA – 120 Lê Lợi – Quy Nhơn
PHÚ YÊN:
NS VĂN HÓA – Ô phố B8 khu dân dụng DUY TÂN – Tuy Hòa
KHÁNH HÒA:
CÔNG TY CP PHS – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang
SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương
BÌNH THUẬN:
NS HƯNG ĐẠO – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết
ĐỒNG NAI:
NS KIM NGÂN – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa
VŨNG TÀU:
NS ĐÔNG HẢI – 38 Lý Thường Kiệt
NS ABC – 204 Bình Giã
GIA LAI:
NS NHÂN DÂN – 06 Lê Lợi – Pleiku
CÔNG TY SÁCH TBTH – 40B Hùng Vương
DAKLAK:
NS GIÁO DỤC – 19 Trường Chinh
NS LÝ THƯỜNG KIỆT – 55 – 57 Lý Thường Kiệt
CÔNG TY CP VĂN HÓA DAKLAK – 01 Hai Bà Trưng

KONTUM:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH - 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
CÔNG TY CP IN VÀ PHS – 18 Khu Hòa Bình – Đà Lạt
DAK NÔNG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 151 Hai Bà Trưng
NS GIÁO DỤC – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
ĐỒNG NAI:
NS KIM NGÂN – 88 Cách mạng tháng Tám – Biên Hòa
TÂY NINH:
NS VĂN NGHỆ – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:
CÔNG TY PHS – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An
TIỀN GIANG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
VĨNH LONG:
HS MƯỜI – 15 Lê Thái Tổ
CẦN THƠ:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 132 Đường 30 tháng 4
HẬU GIANG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh
ĐỒNG THÁP:
NS VIỆT HƯNG – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:
NS TRẺ – 41 Trần Hưng Đạo
AN GIANG:
TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng
BẠC LIÊU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3
TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ
KIÊN GIANG:
NS ĐÔNG HỒ I – 98B Trần Phú – Rạch Giá
NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
CÀ MAU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2
TRÀ VINH:
NS LIÊN SƯƠNG – 127 Trần Quốc Tuấn

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: LAN ANH
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN
Trình bày bìa: ĐÌNH TÔ

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN 12

Mã số: 1L – 04ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp In Đường Sắt Sài Gòn.
Số xuất bản: 43 – 2010/CXB/28 – 227/ĐHQGHN, ngày 08/1/2010.
Quyết định xuất bản số: 04LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.